Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2016–17

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

# Spezielle Themen: Polyzyklische Gruppen – Blatt 5

Abgabe der Lösungen am 22.11.2016 in der Vorlesung

Bitte bereiten Sie Aufgaben 5.1 und 5.3 für die Übungsstunde vor und geben Sie eine schriftliche Lösungen zu der Aufgabe 5.2 ab; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/PolyzyklischeGruppen_WS1617/`

### Aufgabe 5.1

Die Gruppe $\Gamma$ operiere mittels Automorphismen auf einer Gruppe $G$, und $G/[G,G]$ sei als $\mathbb{Z}\Gamma$-Modul endlich erzeugt. Folgt dann bereits für jedes $i \in \mathbb{N}$, daß $\gamma_i G/\gamma_{i+1} G$ als $\mathbb{Z}\Gamma$-Modul endlich erzeugt ist?
Führen Sie einen Beweis oder geben Sie ein geeignetes Gegenbeispiel an.

### Aufgabe 5.2 (4 Punkte)

Sei $G$ eine virtuell polyzyklische Gruppe.

(a) Zeigen Sie: Die Anzahl der unendlich-zyklischen Faktoren $G_i/G_{i-1} \cong C_\infty$ in einer Kette

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_n = G$$

von Untergruppen mit zyklischen oder endlichen Faktoren $G_i/G_{i-1}$ ist unabhängig von der speziellen Wahl einer solchen Kette.
Die Zahl stellt also eine Invariante $h(G)$ von $G$ dar und heißt die *Hirschlänge* von $G$.

(b) Sei $H \leq G$ und $N \trianglelefteq G$. Beweisen Sie:

$$h(H) \leq h(G); \qquad h(H) = h(G) \Leftrightarrow |G:H| < \infty; \qquad h(G) = h(G/N) + h(N).$$

### Aufgabe 5.3

Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle poly-$C_\infty$ Gruppen $G$ der Hirschlänge $h(G) \leq 3$.