Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2016–17

Spezielle Themen: Polyzyklische Gruppen – Blatt 6

Abgabe der Lösungen am 29.11.2016 in der Vorlesung

Bitte bereiten Sie Aufgaben 6.1 und 6.2 für die Übungsstunde vor und geben Sie eine schriftliche Lösungen zu der Aufgabe 6.3 ab; weitere Informationen auf
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/PolyzyklischeGruppen_WS1617/`

Aufgabe 6.1

(1) Sei $\mathfrak{E}$ eine Eigenschaft für Gruppen, die sich auf Untergruppen vererbt. Zeigen Sie, daß jede Untergruppe einer Gruppe, die residuell-$\mathfrak{E}$ ist, ebenfalls residuell-$\mathfrak{E}$ ist.

(2) Sei $\mathfrak{E}$ eine Eigenschaft für Gruppen, die sich auf Faktorgruppen vererbt. Zeigen Sie, daß im allgemeinen Faktorgruppen einer Gruppe, die residuell-$\mathfrak{E}$ ist, nicht notwendigerweise residuell-$\mathfrak{E}$ zu sein brauchen.

Aufgabe 6.2

Sei p eine Primzahl. Sei G eine virtuell polyzyklische Gruppe mit einem Normalteiler $K \trianglelefteq G$ dergestalt, daß sowohl G/K als auch K residuell endliche p-Gruppen sind.
Zeigen Sie: G ist residuell eine endliche p-Gruppe.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)

Sei G eine virtuell polyzyklische Gruppe und $H \leq G$. Zeigen Sie:

$$H = \bigcap\{L \leq G \mid H \subseteq L \text{ und } |G:L| < \infty\} = \bigcap\{HN \mid N \trianglelefteq G \text{ mit } G/N \text{ endlich}\}.$$

Hinweis. Die zweite Gleichung ist vergleichsweise einfach zu zeigen.
Für die erste Gleichung gehen Sie ähnlich wie im Beweis von Satz 3.5 der Vorlesung vor. Es genügt, zu zeigen: $H = \bigcap\{HA^m \mid m \in \mathbb{N}\} =: B$, wobei $1 \neq A \trianglelefteq G$ frei abelsch ist. Beweisen Sie hierfür zunächst $H \cap A = B \cap A$, und nutzen Sie dann $H \leq B \leq HA$.