Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2016–17

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Spezielle Themen: Polyzyklische Gruppen – Blatt 11

Abgabe der Lösungen am 17.01.2017 in der Vorlesung

Bitte bereiten Sie Aufgaben 11.1 und 11.2 für die Übungsstunde vor und geben Sie eine schriftliche Lösung zu der Aufgabe 11.3 ab; weitere Informationen auf
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/PolyzyklischeGruppen_WS1617/`

Aufgabe 11.1

Sei $G = C_p$ eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung p. Geben Sie ein Beispiel für einen endlich dimensionalen $\mathbb{F}_p G$-Modul V, der sich nicht in eine direkte Summe von einfachen Moduln zerlegen läßt.

Aufgabe 11.2

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(1) Hat K die Charakteristik 0, so ist jede endliche Gruppe $G \leq \mathrm{GL}_n(K)$, die aus oberen Dreieicksmatrizen besteht, bereits abelsch.

(2) Hat K die Charakteristik $p > 0$, so ist jede endliche Gruppe $G \leq \mathrm{GL}_n(K)$, die aus oberen Dreiecksmatrizen besteht und deren Ordnung nicht durch p teilbar ist, bereits abelsch.

(3) Sofern $n \geq 2$ ist, gibt es auflösbare Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(K)$, die nicht per Konjugation auf obere Dreiecksgestalt gebracht werden können.

Aufgabe 11.3 (4 Punkte)

Sei V ein Modul über einem Ring R (mit 1). Weiter sei $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$ die direkte Summe von einfachen Untermoduln U_i, $i \in I$. Zeigen Sie

(1) Für $i \in I$ sei $J = \{j \in I \mid U_j \cong U_i\}$. Dann gilt für die zu U_i gehörige homogene Komponente:

$$V_{U_i} = \bigoplus_{j \in J} U_j.$$

(2) V ist die direkte Summe seiner homogenen Komponenten.

Erinnerung: In der Vorlesung wurde bereits gezeigt: Jeder einfache Untermodul W von V ist isomorph zu einem der Moduln U_i, $i \in I$.