Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2016–17

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Spezielle Themen: Polyzyklische Gruppen – Blatt 13

Abgabe der Lösungen am 31.01.2017 in der Vorlesung

Bitte bereiten Sie Aufgaben 13.1 und 13.2 für die Übungsstunde vor und geben Sie eine schriftliche Lösung zu der Aufgabe 13.1, Aufgabenteile (a), (b) und (c) ab; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/PolyzyklischeGruppen_WS1617/`

Die Aufgabe 13.1 liefert (ohne Verwendung des Dirichletschen Einheitensatzes) einen Beweis dafür, daß eine auflösbare Gruppe bereits dann polyzyklisch ist, wenn all ihre abelschen Untergruppen endlich erzeugt sind.

Aufgabe 13.1 (4 Punkte)

Sei G eine auflösbare Gruppe. Beweisen Sie dem untenstehenden Plan folgend: Sind alle abelschen Untergruppen von G endlich erzeugt, so ist G bereits polyzyklisch.

(a) Zeigen Sie per Induktion nach der auflösbaren Länge von G, daß es genügt den Fall zu betrachten, daß G meta-abelsch ist, also $[[G,G],[G,G]] = 1$ gilt.

(b) Betrachten Sie ein vermeintliches meta-abelsches Gegenbeispiel G. Ohne Einschränkung sei dabei die Hirschlänge $h(A)$ von $A = [G,G]$ möglichst klein. Sei T die Torsionsuntergruppe von A. Zeigen Sie: A/T ist ein rational irreduzibler G/A-Modul.

(c) Betrachten Sie den Fall $A/T \nsubseteq \mathrm{Z}(G/T)$. Finden Sie mit Hilfe der Aufgabe 12.2 eine Untergruppe $H \le G$ mit $|G : AH| < \infty$ und $A \cap H = T$. Zeigen Sie: Dann ist H und folglich auch G polyzyklisch.

(d) Betrachten Sie nun den Fall $A = T$. Sei N eine maximale abelsche Untergruppe von $C = \mathrm{C}_G(T)$. Zeigen Sie: $N \trianglelefteq C$ und C/N läßt sich in $\mathrm{Hom}(N/T, T)$ einbetten. Folgern Sie, daß G virtuell abelsch und damit auch polyzyklisch ist.

(e) Betrachten Sie schließlich den Fall $1 \neq A/T \le \mathrm{Z}(G/T)$. Sei M/T eine maximale abelsche Untergruppe von G/T mit $A/T \subseteq M/T$. Zeigen Sie: M ist polyzyklisch. Zeigen Sie weiter: $M/T = \mathrm{C}_{G/T}(M/T) \trianglelefteq G/T$, und G/M läßt sich in $\mathrm{Hom}(M/A, A/T)$ einbetten. Folgern Sie: G/M ist endlich erzeugt und G daher polyzyklisch.

Aufgabe 13.2

Sei G eine Gruppe und $\mathfrak{g} = \{\sum_g n_g g \mid \sum_g n_g = 0\}$ das Augmentationsideal von $\mathbb{Z}[G]$. Zeigen Sie:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{1 \neq x \in G} \mathbb{Z}(x-1).$$

Dies ist das letzte Übungsblatt, zu dem schriftliche Lösungen einzureichen sind.