Mathematisches Institut
Heinrich-Heine Universität Düsseldorf
Dr. Steffen Kionke

Proseminar:
Kristallographische Gruppen
WS 2014/15

Die Klassifikation der sieben Friesgruppen

Dieser Text behandelt die Klassifikation der Friesgruppen und ist gedacht als eine kurze Ergänzung zum Buch "Symmetrien von Ornamenten und Kristallen" von Klemm [1]. Es wurde versucht, soweit möglich, die Notation von [1] zu verwenden.

1 Begriffe und Definitionen

Es sei $V = \mathbb{R}^2$ die euklidische Ebene versehen mit dem gewöhnlichen inneren Produkt.

Definition 1. Eine *Friesgruppe* G ist eine diskrete Bewegungsgruppe $G \subset \mathrm{AO}(V)$, sodass der Vektorraum $F_G = \langle \Gamma(G) \rangle_{\mathbb{R}}$ ein-dimensional ist. Hierbei ist $\Gamma(G) = \{v \in V \mid T_v \in G\}$. Die Gerade F_G heißt in diesem Fall die *Friesachse* von G.

Lemma 1. *Sei G eine Friesgruppe. Es gibt einen kürzesten Vektor $\tau_G \in \Gamma(G) \setminus \{0\}$ und dieser ist eindeutig bis auf Multiplikation mit ± 1 bestimmt.*

Beweis. Da G eine diskrete Gruppe ist, ist auch die Translationsuntergruppe $T_G = \{T_v \mid T_v \in G\}$ diskret (vgl. Definition 2.1 in [1]). Aus Folgerung 2.3 [1] folgt nun, dass $\Gamma(G)$ ein Gitter in F_G ist. Aus Satz 2.7 [1] folgt also, dass $\Gamma(G)$ eine $\mathbb{Z}$-Basis besitzt. Weil $\dim_{\mathbb{R}} F_G = 1$ gilt, besteht diese aus einem Vektor τ_G, d.h. $\Gamma(G) = \mathbb{Z}\tau_G$. Offensichtlich ist τ_G in $\Gamma(G)$ ein kürzester Vektor und der einzige andere Vektor der selben Länge ist der Vektor $-\tau_G$. □

Einen solchen kürzesten Vektor $\tau_G \in \Gamma(G)$ nennen wir *Friesvektor* von G.

Korollar 1. *Ist τ_G ein Friesvektor, so ist $\Gamma(G) = \mathbb{Z}\tau_G$ und die Translationsuntergruppe*

$$T_G = \{T_{m\tau_G} \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

ist isomorph zur additiven Gruppe $\mathbb{Z}$.

Wir wollen nun definieren welchen Begriff der Äquivalenz von Friesgruppen wir betrachten.

Definition 2. Zwei Friesgruppen G_1 und G_2 heißen *äquivalent*, wenn es einen affinen Automorphismus $\varphi \in \mathrm{AGL}(V)$ gibt, mit der Eigenschaft

$$G_1 = \varphi^{-1} G_2 \varphi.$$

Wir schreiben dann $G_1 \sim G_2$.

Bemerkung. Man prüft leicht nach, dass die Relation $\sim$ eine *Äquivalenzrelation* auf der Menge der Friesgruppen definiert. Unser Ziel ist es die Äquivalenzklassen dieser Relation zu bestimmen. Man spricht in diesem Fall von der Klassifikation der Friesgruppen.

2 Die Punktgruppe einer Friesgruppe

Es sei G eine Friesgruppe mit Punktgruppe G_0. Wir werden feststellen, dass es für G_0 nur sehr wenige Möglichkeiten gibt. Folgende Beobachtung wird nützlich sein.

Lemma 2. *Die Friesachse F_G und ihr orthogonales Komplement $F_G^\perp$ sind beide stabil unter den Elementen der Punktgruppe G_0.*

Beweis. Wähle einen Friesvektor τ_G von G. Sei $\gamma \in G_0$, das heißt, es gibt einen Vektor $w \in V$, sodass $T_w\gamma$ in G liegt. Dann gilt

$$T_w\gamma T_{\tau_G}(T_w\gamma)^{-1} = T_w T_{\gamma\tau_G} T_{-w} = T_{\gamma\tau_G} \in G$$

Also liegt $\gamma\tau_G \in \Gamma(G) = \mathbb{Z}\tau_G$. Da τ_G eine Basis des ein-dimensionalen Raumes F_G bildet, gilt $\gamma F_G = F_G$. Es ist aber γ eine orthogonale Abbildung, d.h. sie erhält auch Winkel. Damit bleiben alle Vektoren die orthogonal auf F_G stehen auch nach der Operation durch γ orthogonal zu dieser Achse. □

Sei G eine Friesgruppe. Wir schreiben den Vektorraum V als direkte Summe von orthogonalen Unterräumen $V = F_G \oplus F_G^\perp$. Für $\epsilon, \delta \in \{\pm 1\}$ definieren wir eine orthogonale Abbildung $I_{\epsilon,\delta}\colon V \to V$ durch die Vorschrift $I_{\epsilon,\delta}w = \epsilon w$ für $w \in F_G$ and $I_{\epsilon,\delta}w = \delta w$ für $w \in F_G^\perp$. So erhalten wir vier orthogonale Abbildungen die zusammen eine Gruppe bilden. Wählen wir eine Basis von V deren erster Vektor in F_G und deren zweiter Vektor in $F_G^\perp$ liegt, so ist diese Gruppe gegeben durch die vier Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese Gruppe ist isomorph zur Diedergruppe D_2.

Satz 1. *Sei G eine Friesgruppe, dann ist die Punktgruppe G_0 eine Untergruppe der Gruppe $D_2 = \{I_{\epsilon,\delta} \mid \epsilon, \delta \in \{\pm 1\}\}$.*

Beweis. Sei $\gamma \in G_0$. Nach Lemma 2 erhält γ die Geraden F_G und $F_G^\perp$. Da γ eine orthogonale Abbildung ist, erhält sie Längen. Somit kann sie auf F_G und $F_G^\perp$ nur mit der Multiplikation mit 1 oder -1 wirken. □

3 Zentrierte Friesgruppen

Wir wollen nun erarbeiten wie sich Friesvektor und Friesachse beim Übergang zu einer äquivalenten Friesgruppe verändern. Wir werden sehen, dass wir für die Klassifikation letztlich nur spezielle, sogenannte *zentrierte*, Friesgruppen betrachen müssen, weil jede andere Friesgruppe zu einer solchen äquivalent ist.

Lemma 3. *Sei G eine Friesgruppe und $v \in V$ mit $v \neq 0$ gegeben. Dann gibt es eine zu G äquivalente Friesgruppe G' mit Friesvektor $\tau_{G'} = v$.*

Beweis. Sei τ_G ein Friesvektor von G. Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ mit $\|\tau_G\| = \lambda \|v\|$. Da die Vektoren λv und τ_G gleiche Länge haben, gibt es eine orthogonale Matrix $H \in \mathrm{O}(V)$ mit

$$H\tau_G = \lambda v.$$

Setze $\varphi = \lambda^{-1} H \in \mathrm{GL}(V)$ und definiere $G' := \varphi G \varphi^{-1} \subset \mathrm{AO}(V)$. Die Translationen in G' entprechen den mit φ konjugierten Translationen von G, d.h. für $T_w \in G$ ist

$$\varphi T_w \varphi^{-1} = T_{\varphi w}$$

eine Translation in G'. Also ist $\Gamma(G') = \varphi\Gamma(G) = \mathbb{Z}\varphi(\tau_G) = \mathbb{Z}v$. Insbesondere ist $v = \tau_{G'}$ ein Friesvektor von G'. $\square$

Definition 3. Eine Friesgruppe G heißt *zentriert*, wenn für alle Elemente $T_w g \in G$ der Vektor w in der Friesachse liegt, d.h. $w \in F_G$.

Lemma 4. *Jede Friesgruppe G ist zu einer zentrierten Friesgruppe G' mit $\Gamma(G) = \Gamma(G')$ und $G_0 = G_0'$ äquivalent.*

Beweis. Für alle $\gamma \in G_0$ wählen wir einen Vektor $w(\gamma) \in V$, sodass $T_{w(\gamma)}\gamma$ ein Element von G ist. Da $V = F_G \oplus F_G^\perp$ können wir den Vektor $w(\gamma)$ eindeutig zerlegen in

$$w(\gamma) = t(\gamma) + n(\gamma)$$

mit $t(\gamma) \in F_G$ und $n(\gamma) \in F_G^\perp$. Wir zeigen, dass $n\colon G_0 \to F_G^\perp$ ein verschränkter Homomorphismus (siehe 6.13 in [1]) ist. In der Tat, für $\gamma, \eta \in G_0$ gilt

$$T_{w(\gamma)}\gamma T_{w(\eta)}\eta = T_{w(\gamma)+\gamma w(\eta)}\gamma\eta.$$

Wir schließen daraus, dass $w(\gamma) + \gamma w(\eta) = w(\gamma\eta) + m\tau_G$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Projizieren wir nun orthogonal auf die Gerade $F_G^\perp$, so erhalten wir $n(\gamma) + \gamma n(\eta) = n(\gamma\eta)$.

Wir definieren nun

$$s = -\frac{1}{|G_0|}\sum_{g \in G_0} n(g)$$

und beobachten, dass

$$s - \gamma s = \frac{1}{|G_0|}\sum_{g \in G_0} \gamma n(g) - n(\gamma g) = -\frac{1}{|G_0|}\sum_{g \in G_0} n(\gamma) = -n(\gamma).$$

Wir definieren jetzt die äquivalente Friesgruppe $G' := T_s G T_{-s}$ und werden zeigen, dass diese die Behauptungen im Lemma erfüllt. Da die Translationen in G' genau die Translationen aus G sind (denn $T_s T_w T_{-s} = T_w$), hat G die selbe Friesachse und Friesvektor wie G. Nun zeigen wir, dass G' zentriert ist. Sei $z \in G'$ beliebig, dann gibt es ein $\gamma \in G_0$ und ein $m \in \mathbb{Z}$, sodass

$$z = T_s T_{w(\gamma)+m\tau_G} \gamma T_{-s} = T_{s-\gamma s+w(\gamma)+m\tau_G} \gamma. \tag{1}$$

Nach Konstruktion ist $s - \gamma s + w(\gamma) \in F_G = F_{G'}$, also ist G' zentriert. Aus der Rechnung (1) sieht man auch, dass die Punktgruppen von G und G' übereinstimmen. □

4 Bestimmung der sieben Friesgruppen

Wir haben gesehen, dass wir uns zur Klassifikation der Friesgruppen auf zentrierte Friesgruppen (Lemma 4) mit gewähltem Friesvektor (Lemma 3) beschränken können. Sei also $G \subset \mathrm{AO}(V)$ eine zentrierte Friesgruppe mit Punktgruppe G_0. Weil G zentriert ist, ist für jedes Element $\gamma \in G_0$ die Menge

$$\alpha_G(\gamma) = \{\, v \in V \mid T_v \gamma \in G \,\}$$

eine Nebenklasse von $\Gamma(G) = \mathbb{Z}\tau_G$ in F_G. In der Tat, sind $T_v\gamma$ und $T_w\gamma$ in G, dann gilt

$$T_v \gamma (T_w \gamma)^{-1} = T_{v-w} \in G,$$

also $v - w \in \Gamma(G)$. Wir erhalten also eine Abbildung $\alpha_G \colon G_0 \to F_G/\Gamma(G)$. Man beachte, dass $F_G/\Gamma(G)$ ein G_0-Modul ist im Sinne von 6.1 [1].

Lemma 5. *Sei G eine zentrierte Friesgruppe, die Abbildung $\alpha_G \colon G_0 \to F_G/\Gamma(G)$ ist ein verschränkter Homomorphismus.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für alle $g, h \in G_0$ die Gleichung $\alpha_G(gh) = \alpha_G(g) + g\alpha_G(h)$ gilt. Für $v \in \alpha_G(g)$ und $w \in \alpha_G(h)$ gilt aber

$$T_v g T_w h = T_{v+gw} gh$$

also $v + gw \in \alpha_G(gh)$. □

Definition 4. Sei G eine zentrierte Friesgruppe. Die Klasse $[\alpha_G]$ in der Kohomologiegruppe $H^1(G_0, F_G/\Gamma(G))$ heißt der *Typ* von G (vgl. 6.13 in [1]).

Wir werden unten beweisen, dass die Punktgruppe und der Typ einer Friesgruppe ausreichen um ihre Äquivalenzklasse zu bestimmen. Zunächst werden wir aber eine Liste mit allen möglichen Punktgruppen und Typen erstellen. Wegen Lemma 3 dürfen wir annehmen, dass der Friesvektor der erste Basisvektor e_1 bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ ist. Es sei

$$D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lemma 6. *Die Gruppe D_2 hat genau 5 verschiedene Untergruppen*

1. $U_1 = \{1\}$ *mit* $H^1(U_1, \mathbb{R}e_1/\mathbb{Z}e_1) = \{0\}$,
2. $U_2 = \{\pm 1\}$ *mit* $H^1(U_2, \mathbb{R}e_1/\mathbb{Z}e_1) = \{0\}$,
3. $U_3 = \{1, I_{-1,1}\}$ *mit* $H^1(U_3, \mathbb{R}e_1/\mathbb{Z}e_1) = \{0\}$,
4. $U_4 = \{1, I_{1,-1}\}$ *mit* $H^1(U_4, \mathbb{R}e_1/\mathbb{Z}e_1) = \{0, [\theta]\}$, *wobei* $\theta : U_4 \to \mathbb{R}e_1/\mathbb{Z}e_1$ *definiert ist durch* $\theta(I_{1,-1}) = 1/2e_1 + \mathbb{Z}e_1$.
5. $U_5 = D_2$ *mit* $H^1(U_5, \mathbb{R}e_1/\mathbb{Z}e_1) = \{0, [\omega]\}$ *wobei* $\omega : U_5 \to \mathbb{R}e_1/\mathbb{Z}e_1$ *definiert ist durch* $\omega(I_{1,-1}) = 1/2e_1 + \mathbb{Z}e_1$, $\omega(I_{-1,1}) = 1/2e_1 + \mathbb{Z}e_1$ *und* $\omega(-1) = 0$.

Beweis. Es ist leicht zu überprüfen, dass die fünf aufgezählten Gruppen wirklich alle Untergruppen von D_2 sind.

Die Aussage für U_1 folgt direkt aus der Definition von H^1. Die beiden Gruppen U_2 und U_3 haben zwei Elemente und für das Element $\neq 1$ ist e_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert -1. Aus 6.22 [1] folgt nun, dass $H^1(U_2, \mathbb{R}e_1/\mathbb{Z}e_1) = \{0\}$ sowie $H^1(U_3, \mathbb{R}e_1/\mathbb{Z}e_1) = \{0\}$. Die Gruppe U_4 hat wieder zwei Elemente und wird erzeugt durch $I_{1,-1}$. Aus 6.21 [1] folgt, dass die Elemente in $H^1(U_4, \mathbb{R}e_1/\mathbb{Z}e_1)$ den Elementen w von $\mathbb{R}e_1/\mathbb{Z}e_1$ entsprechen, die $2w = 0$ erfüllen – dies sind $w = \mathbb{Z}e_1$ und $w = 1/2e_1 + \mathbb{Z}e_1$. Ähnlich geht man für $U_5 = D_2$ vor: aus 6.23 [1] folgt, dass die verschränkten Homomorphismen $f : D_2 \to \mathbb{R}e_1/\mathbb{Z}e_1$ genau die Abbildungen sind, welche $f(1) = 0$ und $f(I_{1,-1}) = f(-1) - f(I_{-1,1}) = f(I_{-1,1}) - f(-1)$ erfüllen. Ein solcher verschränkter Homomorphismus ist in $B^1(D_2, \mathbb{R}e_1/\mathbb{Z}e_1)$ genau dann, wenn $f(I_{1,-1}) = 0$ □

Satz 2. *Zwei zentrierte Friesgruppen G und G' mit selbem Friesvektor $e_1 \in \mathbb{R}^2$ sind äquivalent genau dann, wenn $G_0 = G'_0$ (als Teilmengen von* $\mathrm{O}(2)$*) und* $[\alpha_G] = [\alpha_{G'}] \in H^1(G_0, \mathbb{R}e_1/\mathbb{Z}e_1)$.

Bemerkung. Ist $e_1 = \tau_G = \tau_{G'}$, dann gilt auch $F_G = F_{G'} = e_1\mathbb{R}$ und auch $\Gamma(G) = \Gamma(G') = e_1\mathbb{Z}$.

Beweis. "$\Leftarrow$": Angenommen $G_0 = G'_0$ und $[\alpha_G] = [\alpha_{G'}]$. Es gibt also einen Vektor $s \in F_G$ mit $\alpha_G(g) = \alpha_{G'}(g) + s - gs + \Gamma(G)$. Für alle $v \in \alpha_{G'}(g)$ ist also der Vektor $v + s - gs$ in $\alpha_G(g)$. Daraus folgt $T_s G' T_{-s} = G$, denn für $T_v g \in G'$ ist $v \in \alpha_{G'}(g)$ und damit

$$T_s T_v g T_{-s} = T_{v+s-gs} g \in G.$$

"$\Rightarrow$": Angenommen G und G' sind äquivalent, das heißt, es gibt einen affinen Isomorphismus $T_s h \in \mathrm{AGL}(V)$ (mit $s \in V$ und $h \in GL(V)$), sodass

$$T_s h G' h^{-1} T_{-s} = G.$$

Es ist $T_v g \in G'$ genau dann, wenn $T_{s-hgh^{-1}s+hv} hgh^{-1} \in G$. Insbesondere ist $hG'_0 h^{-1} = G_0$.

Betrachte die Standardbasis $B = e_1, e_2$ von $\mathbb{R}^2$. Wegen $h\Gamma(G) = \Gamma(G)$ wirkt h auf e_1 mit ± 1. Folglich besitzt die Matrix von h (bezüglich der Basis B) die Form

$$h = \begin{pmatrix} \pm 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^\times$.
Behauptung: für alle $g \in G'_0$ gilt $hgh^{-1} = g$.
Nach Satz 1 sind g und hgh^{-1} diagonale Matrizen. Ist $g = I_{\epsilon,\delta}$, dann gilt

$$hgh^{-1} = \begin{pmatrix} \pm 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & \mp \frac{x}{y} \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon & a \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

mit $a = \frac{x}{y}(\delta - \epsilon)$. Da hgh^{-1} selbst wieder diagonal ist, gilt $a = 0$ und $hgh^{-1} = g$. Aus der Behauptung folgt direkt, dass $G_0 = G'_0$ ist.

Es bleibt zu zeigen, dass die Typen von G und G' übereinstimmen. Wegen Lemma 6 können wir $I_{1,-1} \in G_0$ annehmen. In diesem Fall muss aber, damit $a = 0$ ist, $x = 0$ gelten. Wir sehen also, dass h diagonal ist, genauer

$$h = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Wir schließen, dass $\alpha_G = \pm\alpha_{G'}$. In Lemma 6 haben wir gesehen, dass $H^1(G_0, \mathbb{R}e_1/\mathbb{Z}e_1)$ nie mehr als zwei Elemente hat. Es gilt insbesondere $[\alpha_G] = [\pm\alpha_{G'}] = [\alpha_{G'}]$. $\square$

Mit der Liste aus Lemma 6 können wir nun ganz einfach schließen, dass es genau sieben Friesgruppen gibt. Diese sind in der Notation von Klemm (siehe Seite 6 in [1])

1. $G_0 = U_1$, dann ist G die Gruppe C_1^* (auch p1 genannt).
2. $G_0 = U_2$, dann ist G die Gruppe C_2^* (auch p2 genannt).
3. $G_0 = U_3$, dann ist G die Gruppe D_1^* (auch p1m1 genannt).
4. $G_0 = U_4$. Ist der Typ von G die Klasse 0, dann ist G die Gruppe D_1^{**} (auch p11m genannt). Ist der Typ von G die Klasse $[\theta]$, dann ist G die Gruppe D_1^{***} (auch p11g genannt).
5. $G_0 = D_2$. Für den Null-Typ ist G die Gruppe D_2^* (auch p2mm genannt). Falls G vom Typ $[\omega]$ ist, dann ist G die Gruppe D_2^{**} (auch p2mg genannt).

Literatur

[1] Michael Klemm. *Symmetrien von Ornamenten und Kristallen.* Hochschultext. Springer-Verlag, Berlin, 1982.