Seminar „Charaktertheorie endlicher Gruppen“

Alejandra Garrido und Benjamin Klopsch

Wintersemester 2017/18

1 Organisatorisches

Zeit und Ort: dienstags 14:30 - 16:00 Uhr in 25.22.03.73

Beginn: Dienstag, 10. Oktober 2018

Webseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/Seminar_Charaktertheorie_WS1718/`

Anmeldung: per E-mail an alejandra.garrido@uni-duesseldorf.de

Veranstalter: Prof. Dr. Benjamin Klopsch Gebäude 25.22, Raum 03.50, E-mail: klopsch@uni-duesseldorf.de

Veranstalter: Dr. Alejandra Garrido Gebäude 25.22, Raum 03.42, E-mail: alejandra.garrido@uni-duesseldorf.de, Sprechstunden: nach Vereinbarung

2 Literatur

Hauptquelle: G. James und M. Liebeck, *Representations and characters of groups*, Cambridge University Press, Second edition, 2001

Weitere hilfreiche Quellen:

- B. Steinberg, *Representation theory of finite groups: An introductory approach*, Springer Universitext, 2012.
- J.-P. Serre, *Lineare Darstellungen endlicher Gruppen*, Braunschweig: Vieweg, 1972.
- B. Huppert, *Character theory of finite groups*, De Gruyter expositions in Mathematics 25, De Gruyter, 1998.

Die ursrpungliche Quellen über Charaktere von Frobenius und Schur sind hier verfügbar.

- F.G. Frobenius, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. III. Springer-Verlag, 1969.
- I. Schur, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. I. Springer-Verlag, 1973.

3 Vorträge

Vortrag 0: Einleitung und Wiederholung Antworten auf folgende Fragen: Was sind Darstellungen und Charaktere endlicher Gruppen? Wofür wurden sie erfunden? Wofür werden sie jetzt verwendet? Was werden wir in diesem Seminar lernen? Wiederholung grundlegender Kenntnisse aus der Linearen Algebra und der Gruppentheorie.

Vortrag 1: Darstellungen und Moduln (Kapitel 3-5) Definitionen von: Darstellung, Äquivalenz, Kern, treue Darstellung. Definition eines FG-Moduls, Äquivalenz zum Begriff der Darstellung, Äquivalente FG-Moduln, Permutationsmoduln. Definitionen von: FG-Untermoduln und Teildarstellungen, irreduzible Darstellung. Alle Definitionen sind durch Beispiele zu verdeutlichen. Zum Not kann der Beweis von Proposition 4.9 ausgelassen werden.

Vortrag 2: Satz von Maschke (Kapitel 7 und 8) Morphismen zwischen FG-Moduln, direkte Summe, der Satz von Maschke (alle komplexen und reellen Darstellungen einer endlichen Gruppe sind vollständig reduzibel). Beispiele die den Satz bzw. dessen Nichanwendenbarkeit illustrieren.

Vortrag 3: Die Gruppenalgebra und das Schursche Lemma (Kapitel 6 und 9) Die Gruppenalgebra, ein zentrales Objekt, wird im Kap 6 definiert. Dadurch erklärt man die reguläre Darstellung einer Gruppe, die treu ist. Die Gruppenalgebra wirkt, auf naturliche Weise, auf jeden FG-Modul. Im Kap 9 wird das Schursche Lemma gezeigt. Hier ist es wichtig, dass der Körper algebraisch abgeschlossen ist. Mit diesem Lemma kann man die irreduziblen Darstellungen abelscher Gruppen klassifizieren. Wenn es zeitlich knapp wird, kann auf die Behandlung des Zentrums der Gruppenalgebra verzichtet werden (von *Some further applications of Schur's Lemma* bis Ende Seite 85.)

Vortrag 4: Die Gruppenalgebra als „Träger"aller irreduziblen Darstellungen (Kapitel 10 und 11) Im Kap 10 zeigt man, dass eine endliche Gruppe nur endlich viele irreduzible Darstellungen hat und dass diese alle als Teildarstellungen der regulären Darstellung (Gruppenalgebra) vorkommen. Im Kap 11 findet man heraus, wie viele der irreduziblen Teildarstellungen der regulären Darstellung jeweils isomorph zueinander sind. Dafür wird der Vektorraum der Morphismen zwischen $\mathbb{C}G$-Moduln betraachtet.

Vortrag 5: Die Konjugationsklassen von Gruppen (Kapitel 12) Im Kapitel 12 studiert man Gruppen und ihre Konjugationsklassen. Diese sind einfach die Bahnen der Wirkung einer Gruppe auf sich selbst per Konjugation: $x \mapsto x \cdot g := g^{-1}xg$. Beispiele über Diedergruppen (und wenn nötig über alternierende Gruppen) können ausgelassen werden. Auf jeden Fall das Zentrum der Gruppenalgebra betrachten (und es ggf. es definieren; siehe Kapitel 9).

Vortrag 6: Charaktere (Kapitel 13) Hier werden Charaktere einer Gruppe eingeführt und die erste Eigenschaften bewiesen. Diese sollen durch Beispiele illustriert werden.

Vortrag 7: Innere Produkte von Charakteren (Kapitel 14) Hier wird ein inneres Produkt (eine Hermitsche Form) zwischen Charakteren definiert. Dadurch werde viele Informationen über Darstellungen gewonnen: die Dimension, ob zwei Darstellungen isomorph sind, usw. Wenn es zeitig passt, auch einen alternativen Beweis von Maschkes Satz vorführen (siehe Exercise 8.6, Kapitel 3.2 in Steinberg).

Vortrag 8: (Kapitel 15 und 16) Hier beweist man, dass die Anzahl der irreduziblen Charaktere einer endlichen Gruppe gleich der Anzahl der Konjugationsklassen ist. Dann wird die Charaktertafel definiert und manche (sehr nutzliche) Rechnensregeln eingeführt, nämlich die Orthogonalitätsrelationen. Viele Beispiele geben und einige der Übungen bearbeiten (z.B. 15.1, 15.2, 16.1, 16.2).

Vortrag 9: Kapitel 17 und 18 Hier wird erklärt, wie ein Charakter einer Faktorgruppe G/N einen Charakter von G ergibt. Da die linearen Charaktere irreduzibel und leichter zu verstehen sind, werden sie benutzt, andere irreduzible Charaktere zu finden. Die Charaktertafel einer Gruppe wird auch verwendet, um herauszufinden, ob diese Gruppe einfach ist. Die Charaktertafeln von S_4 und A_4 berechnen.

Vortrag 10: Neue Charaktere aus bekannten, Tensorprodukte (Kapitel 19) Das Tensorprodukt wird definiert, um zu zeigen, dass das Produkt zweier Charaktere wieder ein Charakter ist. Dadurch werden die Charaktertafel von S_5 und S_6 berechnet. Man nutzt auch Tensorprodukte, um die Charaktere eines direkten Produktes von Gruppen zu finden.

Vortrag 11: Darstellungen und Untergruppen (Kapitel 20- ersten Teil 21) Einschränkungen von Darstellungen und Charaktere auf einer Untergruppe gibt es wie erwartet. Umgekehrt können auch Darstellungen von Darstellungen einer Untergruppe induziert werden. (Der Vortrag geht bis „Induced characters “).

Vortrag 12: Induzierte Charaktere und Gruppe vder Ordnung pq (Ende Kapitel 21 und Kapitel 25) Induzierte Charaktere und Frobenius-Reziprozität. Als Anwendung und Beispiel die Charaktertafel der Gruppen der Ordnung pq (fü Primzahlen p, q) berechnen.

Vortrag 13: Algebraische Zahlen (Kapitel 22) Eher Zahlen-theoretisch. Alle Charakterwerte sind algebraische Zahlen. Weitere numerische Eigenschaften von Charakterwerten.

Vortrag 14: Anwendungen und weitere Themen Hier gibt es ein Auswahl von Themen:

- Der $p^a q^b$ Satz von Burnside: alle Gruppe von Ordnung $p^a q^b$ mit $a + b \geq 2$ sind auflösbar, insbesonders, nicht einfach. (Kapitel 25 und 31). Der Beweis nutzt Charaktertheorie und nicht „rein“gruppentheoretische Methoden (und die Beweise, die nur solche Methoden verwenden, sind viel komplizierter). Dies ist eine wichtige Anwendung der Charaktertheorie.
- Anwendungen zu Molekülschwingung (Kapitel 32).
- Charaktertafeln von Beispielen: Diedergruppen, Symmetrische-Gruppen (Kap 29), p-Gruppen (Kap 26). [Man kann einen ganzen Vortrag über die Symmetrische-Gruppe halten, mit Ergänzungen aus Kap 10 von Steinberg.]
- Fourier-Analysis über endliche Gruppen (Kapitel 5 von Steinberg) mit Anwendungen zu Zufallsbewegungen (Random walks) und Mischen von Karten (Kapitels 10 und 11 von Steinberg). [Mehrere Vorträge Nötig. Bei Interesse, könnte als Vorträge 13 und 14 vorgeführt werden].
- (Nur für Studierende, die schon topologische Gruppen gesehen haben) Darstellungstheorie lokal kompakter abelscher Gruppen. (Loomis, *Introduction to abstract harmonic analysis*, Dover books on mathematics, 2011).