Darstellungen und Moduln

Melinda Hagedorn

28. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

3 Darstellungen von Gruppen

Darstellungen sind Homomorphismen von G in $GL_n(F)$. Man kann sich Gruppen also als Matrizengruppen vorstellen. Wir werden klären: Was sind Darstellungen? Wann heißen zwei Darstellungen äquivalent? Was ist der Kern einer Darstellung?

3.1 Darstellungen

Sei G eine Gruppe und F sei $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
$GL_n(F)$ bezeichne die Gruppe der invertierbaren $n \times n$ - Matrizen mit Einträgen in F.
I_n ist die $n \times n$ - Einheitsmatrix

3.1 Def Eine Darstellung von G über F ist ein Homomorphismus ρ von G nach $GL_n(F)$, wobei $n \in \mathbb{N}$ der Grad von ρ ist.

Bem (1) Funktion $\rho : G \to GL_n(F)$ ist eine Darstellung $\Leftrightarrow (gh)\rho = (g\rho)(h\rho)\ \forall g, h \in G$.
(2) Für alle Darstellungen $\rho : G \to GL_n(F)$ gilt: $1\rho = I_n$ und $g^{-1}\rho = (g\rho)^{-1}\ \forall g \in G$.
Da Darstellungen Homomorphismen sind.

3.2 Bsp (1) Sei G die Diedergruppe $D_8 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. Definiere $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und prüfe: $A^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = I_2 = B^2$ und

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

Nach Bsp 1.4 ist die Funktion $\rho : G \to GL_2(F)$, $a^i b^j \mapsto A^i B^j$ $(0 \le i \le 3\ ,\ 0 \le j \le 1)$.
Dies ist eine Darstellung von D_8 über F vom Grad 2. Konkret:

$$1\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ a^2\rho = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ ,\ a^3\rho = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,$$
$$b\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ ,\ (ab)\rho = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ (a^2b)\rho = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ (a^3b)\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Sei G eine Gruppe. Definiere $\rho : G \to GL_n(F)$ mit $g\rho = I_n\ \forall g \in G$. Dann gilt $(gh)\rho = I_n = I_n I_n = (g\rho)(h\rho)\ \forall g, h \in G$ und somit ist ρ eine Darstellung von G. Dies zeigt, dass jede Gruppe eine Darstellung beliebig großen Grades besitzt.

3.2 Äquivalente Darstellungen

Nun betrachten wir Möglichkeiten, gegebene Darstellungen ineinander umzuwandeln. Sei $\rho : G \to GL_n(F)$ eine Darstellung und $T \in GL_n(F)$. Wir stellen fest, dass für alle $n \times n$ - Matrizen A,B gilt: $(T^{-1}AT)(T^{-1}BT) = T^{-1}A(TT^{-1})BT = T^{-1}(AB)T$. Diese Beobachtung können wir benutzen, um aus ρ die neue Darstellung σ zu erhalten. Definiere dafür $g\sigma = T^{-1}(g\rho)T \ \forall g \in G$. Denn $(gh)\sigma = T^{-1}((gh)\rho)T = T^{-1}((g\rho)(h\rho))T = T^{-1}((g\rho)TT^{-1}(h\rho))T = (g\sigma)(h\sigma) \ \forall g, h \in G$ und somit ist σ in der Tat eine Darstellung.

<u>3.3 Def</u> Seien $\rho : G \to GL_m(F)$ und $\sigma : G \to GL_n(F)$ Darstellungen von G über F. ρ heißt <u>äquivalent</u> zu σ, falls $n = m$ und $\exists \ T \in GL_n(\mathbb{C}) : g\sigma = T^{-1}(g\rho)T \ \forall g \in G$.

<u>Bem</u> Für alle Darstellungen ρ, σ, τ von G über F gilt:
(1) ρ ist äquivalent zu ρ, reflexiv (Bew: Wähle $T = I_n$)
(2) Wenn ρ äquivalent zu σ ist, dass ist σ äquivalent zu ρ, symmetrisch
(Bew: $T(g\sigma)T^{-1} = TT^{-1}(g\rho)TT^{-1} = g\rho$)
(3) Wenn ρ äquivalent zu σ und σ äquivalent zu τ ist, dann ist ρ äquivalent zu τ, transitiv (Bew: Sei $g\sigma = T^{-1}(g\rho)T$ und $g\tau = S^{-1}(g\sigma)S$, dann gilt $g\tau = S^{-1}T^{-1}(g\rho)TS = (TS)^{-1}(g\rho)(TS)$).
Es handelt sich bei der Äquivalenz von Darstellungen also um eine Äquivalenzrelation.

<u>3.4 Bsp</u> Sei $G = D_8 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ mit der Darstellung aus Bsp 3.2(1). Folglich gilt $a\rho = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $b\rho = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Sei $F = \mathbb{C}$, dann definiere $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, so gilt $T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$, denn $\det(T) = \det(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}) = i$ und somit

$$T^{-1} = \frac{1}{-i} \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i^2 & -i \\ -i^2 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich wurde T so konstruiert, dass $T^{-1}AT$ diagonal ist. Wir erhalten

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Durch $1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ erhalten wir eine zu ρ äquivalente Darstellung σ.

<u>Bem</u> Es gibt zwei zulässige Situationen, in denen die einzige zu ρ äquivalente Darstellung ρ selbst ist; diese sind, wenn der Grad von ρ 1 ist und wenn $g\rho = I_n \ \forall g \in G$. Jedoch gibt es normalerweise viele Darstellungen, die zu ρ äquivalent sind.

3.3 Kerne von Darstellungen

Sei $\rho : G \to GL_n(F)$ eine Darstellung. Nach Def 1.8 gilt $\ker(\rho) = \{g \in G \mid g\rho = I_n\}$ Beachte, dass $\ker(\rho) \trianglelefteq G$ normale Untergruppe . Es kann passieren, dass der Kern einer Darstellung aus ganz G besteht, wie die folgende Definition zeigt.

<u>3.5 Def</u> Die Darstellung $\rho : G \to GL_1(F),\ g\rho = (1)\ \forall g \in G$ wird die <u>triviale Darstellung</u> von G genannt.
Die triviale Darstellung schickt also jedes Gruppenelement auf die 1×1 - Einheitsmatrix. Von besonderem Interesse sind die Darstellungen, die einen trivialen Kern besitzen.

<u>3.6 Def</u> Eine Darstellung $\rho : G \to GL_n(F)$ heißt <u>treu</u>, wenn gilt: $\ker(\rho) = \{1\}$. Dies ist der Fall, wenn nur das neutrale Element von G die Gleichung $g\rho = I_n$ erfüllt.

<u>3.7 Beh</u> Die Darstellung ρ einer endlichen Gruppe ist treu $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(\rho) \cong G$.
<u>Bew</u> Wir wissen, $\ker(\rho) \trianglelefteq G$ und $G/\ker(\rho) \cong \operatorname{Im}(\rho)$ gelten nach dem Isomorphiesatz.
„$\Rightarrow$“ ρ treu $\Rightarrow \ker(\rho) = \{1\} \Rightarrow G/\ker(\rho) \cong \operatorname{Im}(\rho) \Rightarrow \operatorname{Im}(\rho) \cong G$
„$\Leftarrow$“ $\operatorname{Im}(\rho) \cong G \Rightarrow |G| = |\operatorname{Im}(\rho)| \Rightarrow |\ker(\rho)| = 1 \Rightarrow \rho$ treu $\square$

<u>3.8 Bsp</u> (1) Die Darstellung ρ von D_8 die nach Bsp 3.2(1) gegeben ist durch

$$(a^i b^j)\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^j,$$

ist treu, da das neutrale Element das einzige Element $g \in D_8$ ist, das die Gleichung $g\rho = I_2$ erfüllt. Die Gruppe, die von den Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird, ist daher isomorph zu D_8.
(2) Da $T^{-1}AT = I_n \Leftrightarrow A = TI_nT^{-1} \Leftrightarrow A = I_nTT^{-1} \Leftrightarrow A = I_n$, gilt für zwei äquivalente Darstellungen, d.h. $g\sigma = T^{-1}(g\rho)T$, dass ρ treu $\Leftrightarrow g\rho = I_n$ nur für $g = e \Leftrightarrow T^{-1}(g\rho)T = I_n$ nur für $g = e \Leftrightarrow g\sigma = I_n$ nur für $g = e \Leftrightarrow \sigma$ treu. Folglich sind alle zu einer treuen Darstellung äquivalente Darstellungen ebenfalls treu.
(3) Die triviale Darstellung einer Gruppe G ist treu $\Leftrightarrow G = \{1\}$.
In Kapitel 6 werden wir sehen, dass jede endliche Gruppe eine treue Darstellung besitzt. In der Darstellungstheorie geht es auch darum, Darstellungen endlicher Gruppen zu finden und zu verstehen.

4 FG-Moduln

Wir lernen nun, was FG-Moduln sind und wie diese mit Darstellungen von G über F zusammenhängen.

4.1 FG-Moduln

Sei G eine Gruppe und F sei $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei $\rho : G \to GL_n(F)$ eine Darstellung von G. Schreibe $V = F^n$ für den Vektorraum aller Zeilenvektoren $(\lambda_1, .., \lambda_n)$, $\lambda_i \in F$. Für alle $v \in V$ und $g \in G$ ist das Produkt $v(g\rho)$ eines Zeilenvektors v mit einer $n \times n$ - Matrix $g\rho$ ein Zeilenvektor in V $1 \times n$ mal $n \times n$ macht $1 \times n$. Für die Multiplikation $v(g\rho)$ gelten folgende Eigenschaften:
(a) $v((gh)\rho) = v(g\rho)(h\rho)\ \forall v \in V,\ g, h \in G$, da $\rho \in \mathrm{Hom}(G, GL_n(F))$
(b) $v(1\rho) = v\ \forall v \in V$, da $1\rho = I_n$
(c) $(\lambda v)(g\rho) = \lambda(v(g\rho))$ und $(u + v)(g\rho) = u(g\rho) + v(g\rho)\ \forall u, v \in V,\ \lambda \in F, g \in G$, aufgrund der Regeln für Matrizenmultiplikationen

<u>**4.1 Bsp**</u> Sei $G = D_8 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$ und sei $\rho : G \to GL_2(F)$ die Darstellung von G über F aus Bsp 3.2(1). Dann gilt $a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Für $v = (\lambda_1, \lambda_2) \in F^2$ gilt zum Beispiel

$$v(a\rho) = (\lambda_1, \lambda_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (-\lambda_2, \lambda_1), v(b\rho) = (\lambda_1, \lambda_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (\lambda_1, -\lambda_2)$$

$$\text{und } v(a^3\rho) = (\lambda_1, \lambda_2)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\lambda_2, -\lambda_1)$$

<u>**4.2 Def**</u> Sei V ein Vektorraum über F und G eine Gruppe, dann ist V ein <u>FG-Modul</u>, wenn das Produkt vg mit $v \in V$ und $g \in G$ folgende Bedingungen $\forall\ u, v \in V, \lambda \in F$ und $g, h \in G$ erfüllt: (1) $vg \in V$ (2) $v(gh) = (vg)h$ (3)$v1 = v$ (4) $(\lambda v)g = \lambda(vg)$
(5) $(u + v)g = ug + vg$

<u>**Bem**</u> Die Bedingungen (1), (4) und (5) aus der Definition stellen sicher, dass die Funktion $v \mapsto vg (v \in V) \forall g \in G$ ein Endomorphismus von V ist.

<u>**4.3 Def**</u> Sei V ein FG-Modul und $\mathscr{B}$ eine Basis von V. Für jedes $g \in G$ bezeichnet $[g]_{\mathscr{B}}$ die Matrix vom Endomorphismus $v \mapsto vg$ von V, abhängig von der Basis $\mathscr{B}$.

Der Zusammenhang zwischen FG-Moduln und Darstellungen von G über F wird im folgenden wichtigen Resultat deutlich:

4.4 Theorem (1) Wenn $\rho : G \to GL_n(F)$ eine Darstellung von G über F ist und $V = F^n$ gilt, dann wird V ein FG-Modul, wenn wir die Multiplikation vg durch $vg = v(g\rho)(v \in V, g \in G)$ definieren. Ferner existiert eine Basis $\mathscr{B}$ von V , sodass $g\rho = [g]_{\mathscr{B}}\ \forall g \in G$.
(2) Sei V ein FG-Modul und $\mathscr{B}$ eine Basis von V. Dann ist die Funktion $g \mapsto [g]_{\mathscr{B}}\ (g \in G)$ eine Darstellung von G über F.

Bew (1) Sei $\rho : G \to GL_n(F)$ eine Darstellung, $V = F^n$. Für $v(g\rho)$ gilt nach der Vorbemerkung $v(g\rho) \in F^n, v((gh)\rho) = v(g\rho)(h\rho), v(1\rho) = v, (\lambda v)(g\rho) = \lambda(v(g\rho))$ und $(u+v)(g\rho) = u(g\rho) + v(g\rho)\ \forall u, v \in V, \lambda \in F, g, h \in G$. Definiere $vg = v(g\rho)$, dann prüfe: $(1) vg = v(g\rho) \in F^n$ $(2) v(gh) = v((gh)\rho) = v(g\rho)(h\rho) = (vg)(h\rho) = (vg)h$ $(3) v1 = v(1\rho) = v$ $(4) (\lambda v)g = (\lambda v)(g\rho) = \lambda(v(g\rho)) = \lambda(vg)$ $(5) (u+v)g = (u+v)(g\rho) = u(g\rho) + v(g\rho) = ug + vg \forall u, v \in V, \lambda \in F, g, h \in G$. Somit ist F^n nach Def 4.2 ein FG-Modul. Ferner sei $\mathscr{B}$ die Basis (1,0,..,0),(0,1,0,..,0),..,(0,..,0,1) von F^n. Dann gilt $g\rho = [g]_{\mathscr{B}}\ \forall g \in G$.
(2) Sei V ein FG-Modul mit Basis $\mathscr{B}$. Da $v(gh) = (vg)h\ \forall g, h \in G, v \in \mathscr{B}$, gilt $[gh]_{\mathscr{B}} = [g]_{\mathscr{B}}[h]_{\mathscr{B}}$ und insbesondere $[1]_{\mathscr{B}} = [g]_{\mathscr{B}}[g^{-1}]_{\mathscr{B}}\ \forall g \in G$, wobei $[1]_{\mathscr{B}}$ mit $v1 = v\ \forall v \in V$ die Einheitsmatrix ist. Somit ist jede Matrix $[g]_{\mathscr{B}}$ invertierbar. Die Funktion $\rho : G \to GL_n(F), g \mapsto [g]_{\mathscr{B}}$ ist ein Homomorphismus mit $n = \dim(V)$ und daher ist ρ eine Darstellung von G über F. $\square$

Das folgende Beispiel veranschaulicht Teil (1) des Theorems.

4.5 Bsp Sei $G = D_8 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ und sei ρ die Darstellung von G über F (vgl Bsp 3.2(1)), dann gilt $a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Schreibe $V = F^n$. Nach 4.4(1) wird V ein FG-Modul, wenn wir $vg = v(g\rho)(v \in V, g \in G)$ definieren. Z.B. $(1,0)a = (1,0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (0,1)$. Wenn v_1, v_2 die Basis $(1,0), (0,1)$ von V ist, dann erhalten wir $v_1 a = v_2, v_1 b = (1,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (1,0) = v_1, v_2 a = -v_1$ und $v_2 b = -v_2$. Wenn $\mathscr{B}$ die Basis v_1, v_2 bezeichnet, dann ist die Darstellung $g \mapsto [g]_{\mathscr{B}}(g \in G)$ einfach die Darstellung ρ (vgl 4.4(1)).
(2) Sei $G = Q_8 = \langle a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ Quaternionengruppe . In Bsp 1.2(4) wurde Q_8 als die von $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ erzeugte Untergruppe von $GL_2(\mathbb{C})$ definiert, wodurch wir schon eine Darstellung von G über $\mathbb{C}$ haben. Wähle daher $F = \mathbb{C}$. Wir bekommen dann ein $\mathbb{C}G$-Modul mit Basis v_1, v_2, sodass

$$v_1 a = (1,0)\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = (i, 0) = iv_1,$$

$$v_1 b = (1,0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (0,1) = v_2,$$

$$v_2 a = -iv_2 \text{ und } v_2 b = -v_1.$$

Bem In den obigen Beispielen legen die Vektoren v_1a, v_2a, v_1b und v_2b das Produkt $vg\ \forall v \in V, g \in G$ fest. Z.B. in 4.5(1): $(v_1+2v_2)ab = v_1ab+2v_2ab = v_2b-2v_1b = -v_2-2v_1$. Es gilt für alle FG-Moduln V: Wenn $v_1, .., v_n$ eine Basis von V ist und G von $g_1, .., g_r$ erzeugt ist, dann legen die Vektoren $v_ig_j(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r)$ $vg\ \forall v \in V, g \in G$ eindeutig fest.

Nun wollen wir FG-Moduln konstruieren ohne dafür eine Darstellung zu verwenden. Um aus einem Vektorraum V einen FG-Modul zu erhalten, schränkt man zunächst die Operation der Gruppenelemente auf einer Basis von V ein und erweitert diese anschließend linear auf ganz V.

4.6 Beh Sei $v_1, .., v_n$ eine Basis vom Vektorraum V über F, sei vg eine Multiplikation $\forall v \in V, g \in G$, die die folgenden Bedingungen $\forall i$ mit $1 \leq i \leq n, g, h \in G, \lambda_1, .., \lambda_n \in F$ erfüllen: $(1) v_ig \in V$ $(2) v_i(gh) = (v_ig)h$ $(3) v_i1 = v_i$ $(4)(\lambda_1v_1 + .. + \lambda_nv_n)g = \lambda_1(v_1g) + .. + \lambda_n(v_ng)$. Dann ist V ein FG-Modul.

Bew $v1 = (\lambda_1v_1+..+\lambda_nv_n)1 = \lambda_1(v_11)+..+\lambda_n(v_n1) = \lambda_1v_1+..+\lambda_nv_n = v\forall v \in V$. Wegen (1) und (4) folgt, dass die Funktion $v \mapsto vg$ mit $v \in V$ für alle $g \in G$ ein Endomorphismus von V ist, denn $vg \in V, (\lambda v)g = \lambda(vg)$ und $(u + v)g = ug + vg\ \forall u, v \in V, \lambda \in F, g \in G$. Sei nun $(\lambda_1u_1 + .. + \lambda_nu_n)h = \lambda_1(u_1h) + .. + \lambda_n(u_nh)\ \forall \lambda_1, .., \lambda_n \in F, u_1, .., u_n \in V, h \in G$ und seien $v \in V, g, h \in G$. Dann gilt $v = \lambda_1v_1 + .. + \lambda_nv_n$ für $\lambda_1, .., \lambda_n \in F$ und $v(gh) = \lambda_1(v_1(gh)) + .. + \lambda_n(v_n(gh)) = \lambda_1((v_1g)h) + .. + \lambda_n((v_ng)h) = (\lambda_1(v_1g) + .. + \lambda_n(v_ng))h = (vg)h$. Somit sind alle Axiome erfüllt und V ist nach Def 4.2 ein FG-Modul. □

Die nächste Definition übersetzt die Konzepte eine trivialen und einer treuen Darstellen in die Terminologie von FG-Moduln.

4.8 Def (1) Der eindimensionale Vektorraum V über F mit $vg = v\ \forall v \in V, g \in G$ heißt trivialer FG-Modul.
(2)Ein FG-Modul V heißt treu, wenn das neutrale Element von G das einzige $g \in G$ ist, das $vg = v\ \forall v \in V$ erfüllt.

Zum Beispiel ist der FD_8-Modul aus Bsp 4.5(1) treu. Im nächsten Unterkapitel werden wir 4.6 dazu verwenden, treue FG-Moduln für alle Untergruppen der symmetrischen Grupe zu konstruieren.

4.2 Permutations-Moduln

Sei G eine Untergruppe von S_n, sodass G eine Permutationsgruppe von $\{1, .., n\}$ ist. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über F mit der Basis $v_1, .., v_n$. Für jedes i mit $1 \leq i \leq n$ und jede Permutation $\sigma \in G$ definiere $v_i\sigma = v_{i\sigma}$. Dann gelten $v_i\sigma \in V,\ v_i1 = v_i$ und $v_i(\sigma\tau) = v_{i(\sigma\tau)} = v_{(i\sigma)\tau} = (v_i\sigma)\tau$. Diese Operation erweitern wir nun linear für jedes σ auf ganz V. Für alle $\lambda_1, .., \lambda_n \in F$ und $\sigma \in G$ definieren wir $(\lambda_1v_1 + .. + \lambda_nv_n)\sigma = \lambda_1(v_1\sigma) + .. + \lambda_n(v_n\sigma)$. Dann ist V nach 4.6 ein FG-Modul.

4.9 Bsp Sei $G = S_4$ und $\mathscr{B}$ die Basis v_1, v_2, v_3, v_4 von V . Wenn $\sigma = (12)$, dann $v_1\sigma = v_2, v_2\sigma = v_1, v_3\sigma = v_3, v_4\sigma = v_4$. Wenn $\tau = (134)$, dann $v_1\sigma = v_3, v_2\sigma = v_2, v_3\sigma = v_4, v_4\sigma = v_1$. Wir erhalten also:

$$[\sigma]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } [\tau]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.10 Def Sei G eine Untergruppe von S_n. Der FG-Modul mit der Basis $v_1, .., v_n$, sodass $v_i\sigma = v_{i\sigma}$ $\forall i$ und $\sigma \in G$, heißt Permutations-Modul für G über F. Wir nennen $v_1, .., v_n$ die natürliche Basis von V.

Wir stellen fest, dass wenn wir $\mathscr{B}$ für die Basis $v_1, .., v_n$ eines Permutations-Moduls schreiben, die Matrix $[\sigma]_{\mathscr{B}}$ für alle $\sigma \in G$ dann genau einen nicht-nullschen Eintag in jeder Reihe und Spalte hat und dieser Eintrag ist 1. Eine solche Matrix heißt Permutationsmatrix.

Bem (1) Da das einzige Element von G, das jedes v_i fixiert, das neutrale Element ist, sehen wir, dass der Permutations-Modul ist ein treuer FG-Modul. (2) Wenn man sich der Tatsache bewusst ist, dass jede Gruppe der Ordnung n isomorph zu einer Untergruppe von S_n ist, erkennt man, dass G einen treuen FG-Modul der Ordnung n hat. (Vgl Kapitel 6)

4.11 Bsp Sei $G = C_3 = \langle a \mid a^3 = 1 \rangle$. Dann ist G isomorph zur zyklischen Untergruppe von S_3, die von der Permutation (123) erzeugt ist. Dies führt uns zu der Tatsache, dass wenn V ein 3-dimensionaler Vektorraum über F mit der Basis v_1, v_2, v_3 ist, wir dann V in einen FG-Modul überführen können mit $v_1 1 = v_1, v_2 1 = v_2, v_3 1 = v_3, v_1 a = v_2, v_2 a = v_3, v_3 a = v_1, v_1 a^2 = v_3, v_2 a^2 = v_1, v_3 a^2 = v_2$. Natürlich definieren wir $v\sigma$ für ein beliebiges $v \in V$ und $\sigma \in \{1, a, a^2\}$ durch $(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3)\sigma = \lambda_1(v_1\sigma) + \lambda_2(v_2\sigma) + \lambda_3(v_3\sigma)$ $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F$.

4.3 FG-Moduln und äquivalente Darstellungen

Nun geht es um den Zusammenhang zwischen FG-Moduln und äquivalenten Darstellungen von G über F. Ein FG-Modul gibt uns viele Darstellungen, alle von der Form $g \mapsto [g]_{\mathscr{B}} (g \in G)$ für irgendeine Basis $\mathscr{B}$ von V. Das nächste Resultat zeigt, dass all diese Darstellungen äquivalent zueinander sind (vgl Def 3.3). Zudem ergeben sich aus einem FG-Modul auf diesem Weg immer zwei äquivalente Darstellungen von G.

4.12 Theorem Sei V ein FG-Modul mit Basis $\mathscr{B}$ und ρ die durch $\rho : g \mapsto [g]_{\mathscr{B}}(g \in G)$ definierte Darstellung von G über F.
(1) Wenn $\mathscr{B}'$ auch eine Basis von V ist, dann ist die Darstellung $\phi : g \mapsto [g]_{\mathscr{B}'}(g \in G)$ von G äquivalent zu ρ.
(2) Wenn σ eine Darstellung von G ist, die äquivalent zu ρ ist, dann gibt es eine Basis $\mathscr{B}''$ von V, sodass $\sigma : g \mapsto [g]_{\mathscr{B}''}(g \in G)$.
Bew (1) Sei T die Basiswechselmatrix von $\mathscr{B}$ zu $\mathscr{B}'$ (Def 2.23). Dann haben wir $[g]_{\mathscr{B}} = T^{-1}[g]_{\mathscr{B}'}T \ \forall g \in G$ (vgl 2.24). Deshalb ist ϕ äquivalent zu ρ.
(2) Seien ρ und σ äquivalente Darstellungen von G. Dann haben wir für eine beliebige invertierbare Matrix T $g\rho = T^{-1}(g\sigma)T \ \forall g \in G$. Sei $\mathscr{B}''$ die Basis von V, sodass T die Basiswechselmatrix von $\mathscr{B}$ zu $\mathscr{B}''$ ist. Dann gilt $[g]_{\mathscr{B}} = T^{-1}[g]_{\mathscr{B}''}T \ \forall g \in G$ und somit $g\sigma = [g]_{\mathscr{B}''}$. □

4.13 Bsp Sei $G = C_3 = \langle a \mid a^3 = 1\rangle$. Es gibt eine Darstellung ρ von G, die gegeben ist durch $1\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, a^2\rho = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, denn

$$(a\rho)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a^2\rho,\ (a\rho)^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wenn V ein 2-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit der Basis $\mathscr{B}$ v_1, v_2 ist, dann können wir V mit 4.4(1) zu einem $\mathbb{C}G$-Modul machen mithilfe von $v_1 1 = v_1, v_1 a = v_2, v_1 a^2 = -v_1 - v_2, v_2 1 = v_2, v_2 a = -v_1 - v_2, v_2 a^2 = v_1$. Wir haben dann

$$[1]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, [a]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, [a^2]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun sei $u_1 = v_1$ und $u_2 = v_1 + v_2$, dann ist u_1, u_2 eine weitere Basis $\mathscr{B}'$ von V . Wegen $u_1 1 = u_1, u_1 a = -u_1 + u_2, u_1 a^2 = -u_2, u_2 1 = u_2, u_2 a = -u_1, u_2 a^2 = u_1 - u_2$ bekommen wir die Darstellung

$$\phi : g \mapsto [g]_{\mathscr{B}'} \text{ mit } [1]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, [a]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, [a^2]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir stellen fest, dass für $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $g \in G$ gilt $[g]_{\mathscr{B}} = T^{-1}[g]_{\mathscr{B}'}T$ und so sind ρ und ϕ übereinstimmend mit Theorem4.12(1) äquivalent.

5 FG-Untermoduln und Reduzierbarkeit

Wir lernen nun die Grundbausteine der Theorie kennen: Die irreduziblen FG-Moduln. Im Folgenden sei G eine Gruppe und F sei $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

5.1 FG-Untermoduln

5.1 Def Sei V ein FG-Modul. $W \subseteq V$ heißt FG-Untermodul von V, wenn W ein Untervektorraum ist und $wg \in W\ \forall w \in W,\ g \in G$.

Ein FG-Untermodul von V ist also ein Untervektorraum, der ebenfalls ein FG-Modul ist.

5.2 Bsp (1) Für jedes FG-Modul V sind der triviale Vektorraum $\{0\}$ und V selbst FG-Untermoduln von V.
(2) Sei $G = C_3 = \langle a \mid a^3 = 1 \rangle$ und V das 3-dimensionale FG-Modul aus 4.11. Folglich hat V die Basis $v_1,\ v_2\ v_3$ und es gilt $v_1 1 = v_1,\ v_2 1 = v_2,\ v_3 1 = v_3,\ v_1 a = v_2,\ v_2 a = v_3,\ v_3 a = v_1,\ v_1 a^2 = v_3,\ v_2 a^2 = v_1,\ v_3 a^2 = v_2$. Wähle $w = v_1 + v_2 + v_3$ und sei $W = \mathrm{sp}(w)$ der 1-dimensionale Untervektorraum, der von w aufgespannt wird. Da $w1 = wa = wa^2 = w$ gilt, ist W ein FG-Untermodul von V.
Jedoch ist z.B. $\mathrm{sp}(v_1 + v_2)$ kein FG-Untermodul, da $(v_1 + v_2)a = v_2 + v_3 \notin \mathrm{sp}(v_1 + v_2)$.

5.2 Irreduzible FG-Moduln

5.3 Def Ein FG-Modul V heißt irreduzibel, wenn $V \neq \{0\}$ und es von $\{0\}$ und V abgesehen keine FG-Untemoduln besitzt.

Bem (1) Wenn V also ein FG-Untermodul W mit $W \neq \{0\}$ und $W \neq V$ besitzt, dann ist V reduzibel.
(2) Eine Darstellung $\rho : G \to GL_n(F)$ heißt irreduzibel, wenn das entsprechende FG-Modul F^n, gegeben durch $vg = v(g\rho)$ $(v \in F^n,\ g \in G)$, irreduzibel ist (vgl 4.4(1)). ρ heißt reduzibel, wenn F^n reduzibel ist.

Angenommen, V ist ein reduzibler FG-Modul, sodass es ein FG-Untermodul W mit $0 < \dim(W) < \dim(V)$ gibt. Wähle eine Basis $\mathscr{B}_1$ von W und erweitere diese mithilfe des Basisergänzungssatzes zu einer Basis $\mathscr{B}$ von V. Dann hat die Matrix $[g]_{\mathscr{B}}$ für alle $g \in G$ die Form $\begin{pmatrix} X_g & 0 \\ Y_g & Z_g \end{pmatrix}$ (*) für gewisse Matrizen $X_g,\ Y_g$ und Z_g, wobei X_g eine $k \times k$ - Matrix und $k = \dim(W)$ ist. Eine Darstellung vom Grad n ist reduzibel ganau dann, wenn sie äquivalent zu einer Darstellung der Matrix (*) ist, $0 < k < n$. Wir stellen fest, dass hierbei die Funktionen $g \mapsto X_g$ und $g \mapsto Z_g$ Darstellungen von G sind: Dazu seien $g, h \in G$ und multipliziere die Matrizen $[g]_{\mathscr{B}}$ und $[h]_{\mathscr{B}}$ der Form (*). Folglich gilt: Wenn V reduzibel ist, dann gilt $\dim(V) \geq 2$.

5.5 Bsp Sei $G = C_3 = \langle a \mid a^3 = 1 \rangle$ und V der 3-dimensionale FG-Modul mit der Basis $v_1,\ v_2,\ v_3$, sodass $v_1 a = v_2,\ v_2 a = v_3,\ v_3 a = v_1$ wie in 4.11. In Bsp 5.2(2) haben wir gesehen, dass V ein reduzibler FG-Modul ist und ein FG-Untermodul $W = \mathrm{sp}(v_1 + v_2 + v_3)$ besitzt. Sei $\mathscr{B}$ die Basis $v_1 + v_2 + v_3,\ v_1,\ v_2$ von V. Dann gilt

$$[1]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ [a]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ [a^2]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese reduzible Darstellung gibt uns zwei andere Darstellungen: Oben-links haben wir die triviale Darstellung und unten-rechts haben wir die Darstellung, die durch

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ a^2 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

gegeben ist.
Sei $G = D_8$ und $V = F^2$ sei der 2-dimensionale FG-Modul aus Bsp 4.5(1). Folglich gilt $G = \langle a,\ b \rangle$ und für alle $(\lambda,\ \mu) \in V$ haben wir $(\lambda,\ \mu)a = (-\mu,\ \lambda),\ (\lambda,\ \mu)b = (\lambda,\ -\mu)$. Wir behaupten, dass V ein irreduzibler FG-Modul ist. Dazu nehmen wir an, dass es einen FG-Untermodul $U \neq V$ gibt. Dann ist $\dim(U) \leq 1$ und $U =^{(} (\alpha,\ \beta))$ für einige $\alpha, \beta \in F$. Wenn U ein FG-Modul ist, ist $(\alpha,\ \beta)b$ ein Vielfaches von $(\alpha,\ \beta)$, und von jetzt an sei entweder $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$. Da $(\alpha,\ \beta)a$ auch ein Vielfaches von $(\alpha,\ \beta)$ ist, fordert dies $\alpha = \beta = 0$, sodass $U = \{0\}$. Somit ist V irreduzibel, wie behauptet.

6 Zusammenfassung

1. Eine Darstellung einer Gruppe ist ein Homomorphismus von G nach $GL_n(F)$ für ein $n \in \mathbb{N}$

2. Darstellungen ρ und σ von G sind genau dann äquivalent, wenn eine invertierbare Matrix T existiert, sodass $g\sigma = T^{-1}(g\rho)T \; \forall g \in G$

3. Eine Darstellung ist treu, wenn sie injektiv ist

4. Ein FG-Modul ist ein Vektorraum über F, zusammen mit einer Multiplikation von Elementen von G, die die Eigenschaften (1)-(5) aus Definition 4.2 erfüllt.

5. Es gibt eine Beziehung zwischen Darstellungen von G über F und FG-Moduln:
   a) Sei $\rho : G \to GL_n(F)$ eine Darstellung von G. Dann ist F^n ein FG -Modul, wenn man $vg = v(g\rho)$ $(v \in F^n, g \in G)$ definiert.
   b) Wenn V ein FG-Modul ist mit Basis $\mathscr{B}$, dann ist $\rho : g \mapsto [g]_{\mathscr{B}}$ eine Darstellung von G über F.

6. Wenn G eine Untergruppe von S_n ist, dann hat der FG-Permutations-Modul die Basis $v_1, .., v_n$ und $v_i\sigma = v_{i\sigma}$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$ und alle $\sigma \in G$

7. Wenn V ein FG-Modul ist und W ein Untervektorraum von V, der selbst ein FG-Modul ist, dann ist W ein FG-Untermodul von V.

8. Der FG-Modul V ist irreduzibel, wenn $V \neq \{0\}$ und die einzigen FG-Untermoduln $\{0\}$ und V sind.