Charaktere

Seminar: Charaktertheorie endlicher Gruppen,
6. Vortrag

Robin Weishaupt

28.11.2017

Dies ist die schriftliche Ausarbeitung zum 6. Vortrag “Charaktere” des Seminars “Charaktertheorie endlicher Gruppen”, veranstaltet von Prof. Dr. B. Klopsch und Dr. A. Garrido im Wintersemester 2017/2018. Die Ausarbeitung basiert auf dem Buch “Representations and characters of groups” von G. James und M. Liebeck in der 2. Auflage.

6 Charaktere

Allgemeine Voraussetzung: G bezeichnet stets eine Gruppe endlicher Ordnung.

Definition 6.1 (Spur einer Matrix)**.**
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix. Dann ist die **Spur von** A die Summe der Einträge der Hauptdiagonale

$$sp(A) := \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Lemma 6.2 (Eigenschaften der Spur)**.**
Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Matrizen und $T \in GL_n(\mathbb{C})$. Dann gilt:

(i) $sp(A + B) = sp(A) + sp(B)$

(ii) $sp(AB) = sp(BA)$

(iii) $sp(T^{-1}AT) = sp(A)$.

Beweis. Wir beweisen alle 3 Aussagen einzeln:

(i) Es gilt:

$$sp(A + B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = sp(A) + sp(B).$$

(ii) Wir machen uns zuerst klar, dass folgende Rechnung gilt:

$$(AB)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ji}, \quad (BA)_{jj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} \cdot a_{ij}.$$

Nun gilt mit Definition 6.1:

$$\begin{aligned} sp(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} \cdot a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = sp(BA) \end{aligned}$$

(iii) Es gilt:

$$sp(T^{-1}AT) = sp((T^{-1}A)T) \overset{(ii)}{=} sp(T(T^{-1}A)) = sp(TT^{-1}A) = sp(A).$$

□

Definition 6.3 (Charakter eines $\mathbb{C}G$-Moduls)**.**
Sei V ein $\mathbb{C}G$-Modul mit Basis $\mathcal{B}$. Der **Charakter von V** sei definiert als die Funktion

$$\chi : G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto sp([g]_{\mathcal{B}}), \quad g \in G.$$

Bemerkung 6.4.
Der Charakter von V hängt nicht von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ ab. Seien $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ zwei Basen von V, dann existiert eine geeignete Matrix $T \in GL_n(\mathbb{C})$, so dass gilt:

$$[g]_{\mathcal{B}} = T^{-1}[g]_{\mathcal{D}}T.$$

Mit Lemma 6.2 (iii) folgt unmittelbar:

$$\forall g \in G\colon sp([g]_{\mathcal{B}}) = sp(T^{-1}[g]_{\mathcal{D}}T) = sp([g]_{\mathcal{D}}).$$

Bemerkung 6.5.
Man definiert den Charakter $\chi_\rho\colon G \to \mathbb{C}$ einer Darstellung $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ als den Charakter χ des zugehörigen $\mathbb{C}G$-Moduls $\mathbb{C}^n$ (vgl. § 4.4 (1), 1. Vortrag, S.40 4.4 (1)), also

$$\chi_\rho(g) := \chi(g) = sp(g\rho) \text{ für } g \in G.$$

Definition 6.6 (Charakter einer Gruppe, Irreduzibler Charakter)**.**
Man bezeichnet χ als **Charakter von** G, wenn χ Charakter eines zugehörigen $\mathbb{C}G$-Moduls ist. χ heißt **irreduzibler Charakter von** G, falls χ Charakter eines irreduziblen zugehörigen $\mathbb{C}G$-Moduls ist. Analog definiert man den **reduziblen Charakter von** G.

Satz 6.7.
Seien $x, y \in G$. Dann gilt:

(i) Isomorphe $\mathbb{C}G$-Moduln haben die gleichen Charaktere.

(ii) Falls x und y zueinander konjugiert sind, so gilt $\chi(x) = \chi(y)$ für alle Charaktere von G. **M.a.W.: Jeder Charakter ist innerhalb von Konjugationsklassen konstant.**

Beweis. Wir beweisen beide Aussagen einzeln:

(i) Seien V und W zwei isomorphe $\mathbb{C}G$-Moduln und χ ein Charakter von V und ϕ ein Charakter von W. Gem. § 7.7, 2. Vortrag (S.64, 7.7) existieren Basen $\mathcal{B}_1$ von V und $\mathcal{B}_2$ von W, so dass für alle $g \in G$ gilt $[g]_{\mathcal{B}_1} = [g]_{\mathcal{B}_2}$. Folglich gilt auch für alle $g \in G$

$$sp([g]_{\mathcal{B}_1}) = sp([g]_{\mathcal{B}_2}) \quad \Leftrightarrow \quad \chi(g) = \phi(g).$$

(ii) x und y sind zueinander konjugiert in G, also existiert ein Element $g \in G$, so dass gilt: $x = g^{-1}yg$. Sei weiter V ein $\mathbb{C}G$-Modul mit Basis $\mathcal{B}$ und χ Charakter von V. Dann gilt mit Lemma 6.2 und den Eigenschaften einer Darstellung (vgl. § 3.1, 1. Vortrag, S.30, 3.1):

$$\begin{aligned}\chi(x) = sp([x]_{\mathcal{B}}) &= sp([g^{-1}yg]_{\mathcal{B}}) \\ &= sp([g]_{\mathcal{B}}^{-1}[y]_{\mathcal{B}}[g]_{\mathcal{B}}) \overset{(iii)}{=} sp([y]_{\mathcal{B}}) = \chi(y).\end{aligned}$$

□

Definition 6.8 (Grad eines Charakters)**.**
Sei V ein $\mathbb{C}G$-Modul und χ ein Charakter von V. Man bezeichnet $dim(V)$ als **Grad von** χ.

Bemerkung 6.9.
Zu Charakteren:

(i) Charaktere vom Grad 1 werden als **lineare Charaktere** bezeichnet.

(ii) Der Charakter des trivialen $\mathbb{C}G$-Moduls ist ein linearer Charakter und wird als der **triviale Charakter** 1_G bezeichnet. Für diesen gilt:

$$1_G : g \mapsto 1 \text{ für alle } g \in G.$$

Beispiel 6.10.
Als Beispiel betrachten wir die nicht-abelsche Diedergruppe $D_6 \cong S_3$ mit 6 Elementen.

Es gilt $D_6 = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle = \{1, a, a^2, b, ab, a^2b\}$.
In Beispiel § 4 (2), 4. Vortrag (S. 92, 10.8 (2)) haben wir eine vollständige Menge von nicht-isomorphen, irreduziblen $\mathbb{C}G$-Untermoduln U_1, U_2, U_3 für den $\mathbb{C}G$-Modul gefunden. Ist χ_i der Charakter für U_i, so sind χ_1, χ_2, χ_3 die irreduziblen Charaktere von D_6. Betrachen wir nun die Darstellung ρ_3 über U_3, wobei $w := e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$:

$$\rho_3 : D_6 \to GL_2(\mathbb{C}), \quad a \mapsto \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ergibt sich folgende Übersicht für χ_3 vom Grad 2:

g	1	a	a^2	b	ab	a^2b
$g\rho_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} w^2 & 0 \\ 0 & w^{-2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & w \\ w^{-1} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & w^2 \\ w^{-2} & 0 \end{pmatrix}$
$\chi_3(g)$	2	-1	-1	0	0	0

Dabei gilt $w^2 = w^{-1}$. Außerdem gilt $a^b = b^{-1}ab = a^{-1} = a^2$, a und a^2 sind also zueinander konjugiert. Gem. Satz 6.7 muss nun gelten $-1 = \chi(a) = \chi(a^2) = -1$.

Satz 6.11.
Sei V ein $\mathbb{C}G$-Modul und χ ein zugehöriger Charakter. Sei weiter $g \in G$ und $ord(g) = m$. Dann gilt:

(i) $\chi(1_G) = dim(V)$.

(ii) $\chi(g)$ ist die Summe von m-ten Einheitswurzeln.

(iii) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

(iv) $\chi(g) \in \mathbb{R}$ wenn g konjugiert zu g^{-1} ist.

Beweis. Wir beweisen alle Aussagen einzeln:

(i) Sei $n = dim(V)$ und $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Dann ist $[1_G]_{\mathcal{B}}$ unter Berücksichtigung von $\mathcal{B}$ äquivalent zu I_n. Somit gilt mit Lemma 6.2:

$$\chi(1_G) = sp([1_G]_{\mathcal{B}}) = sp(I_n) = n = dim(V).$$

(ii) Gemäß Satz § 9.11, 3. Vortrag (S.83, 9.11) existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Darstellungen aller Elemente $g \in G$ die folgende Form

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_n \end{pmatrix}$$

haben. Dabei sind alle w_i m-te Einheitswurzeln. Folglich gilt

$$\chi(g) = w_1 + \ldots + w_n.$$

(iii) In der passenden Basis $\mathcal{B}$ aus (ii) hat $[g^{-1}]_{\mathcal{B}}$ die folgende Form

$$[g^{-1}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} w_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_n^{-1} \end{pmatrix},$$

denn es gilt $[g^{-1}]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}}^{-1}$ gem. § 3.1, 1. Vortrag (S.30, 3.1). Gemäß (ii) sind die w_i m-te Einheitswurzeln, lassen sich also in der Form $e^{i\varphi}$ für ein geeignetes φ schreiben. Nun gilt

$$w_j^{-1} = (e^{i\varphi_j})^{-1} = e^{-i\varphi_j} = \overline{w_j}, \quad 1 \leq j \leq n$$

und damit dann

$$\chi(g^{-1}) = w_1^{-1} + \ldots + w_n^{-1} = \overline{w_1} + \ldots + \overline{w_n} = \overline{\chi(g)}.$$

(iv) Gemäß Satz 6.7 (ii) gilt $\chi(g) = \chi(g^{-1})$, da g und g^{-1} nach Voraussetzung konjugiert zueinander sind. Mit (iii) folgt weiter $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$. Insgesamt also

$$\chi(g) = \chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$$

und damit folgt $\chi(g) \in \mathbb{R}$.

□

Korollar 6.12.
Sei χ der Charakter einer Gruppe G und $g \in G$ mit $ord(g) = 2$. Dann gilt

$$\chi(g) \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \chi(g) \equiv \chi(1_G) \mod 2.$$

Beweis. Mit Satz 6.11 gilt $\chi(1_G) = dim(V) =: n$ und $\chi(g) = \omega_1 + \ldots + \omega_n$, wobei $w_i^2 = 1$ für $1 \leq i \leq n$, da $ord(g) = 2$. Also folgt $\omega_i \in \{-1, 1\}$ für $1 \leq i \leq n$. Seien nun r w_i mit Wert 1 und s w_i mit Wert -1, $r + s = n$. Dann gilt

$$\chi(g) = r - s \quad \text{und} \quad \chi(1_G) = r + s.$$

Damit gilt bereits $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ und weiter

$$\chi(g) = r - s = r + s - 2s \equiv r + s = \chi(1_G) \mod 2.$$

□

Lemma 6.13.
Seien $\nu_i := r_i e^{\varphi_i i} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $r_i \in \,]0, \infty]$ und $\varphi_i \in \,]-\pi, \pi]$ für $1 \leq i \leq n$. Dann gilt:

$$|\nu_1 + \ldots + \nu_n| = |\nu_1| + \ldots + |\nu_n| \Leftrightarrow \varphi_i = \varphi_j \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq n.$$

Beweis. Klar ist, dass gilt

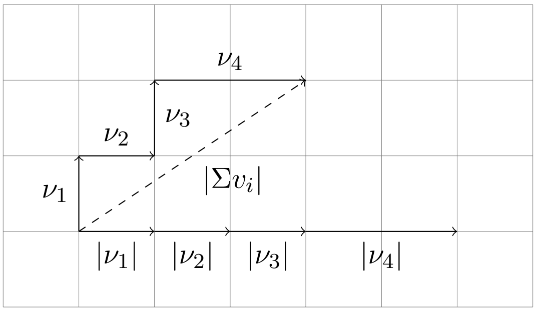
$$|r_1 + \ldots + r_n| = |r_1| + \ldots + |r_n| = r_1 + \ldots + r_n$$

da alle $r_i > 0$ für $1 \leq i \leq n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& & |\nu_1 + \ldots + \nu_n| &= |\nu_1| + \ldots + |\nu_n| \\
&\Leftrightarrow & |\nu_1 + \ldots + \nu_n| &= |r_1 e^{\varphi_1 i}| + \ldots + |r_n e^{\varphi_n i}| \\
&\Leftrightarrow & |\nu_1 + \ldots + \nu_n| &= |r_1| + \ldots + |r_n| \\
&\Leftrightarrow & |r_1 e^{\varphi_1 i} + \ldots + r_n e^{\varphi_n i}| &= r_1 + \ldots + r_n \\
&\Leftrightarrow & \varphi_i = \varphi_j &\text{ für } 1 \leq i, j \leq n
\end{aligned}$$

□

Zur Veranschaulichung eine Skizze:



Theorem 6.14.
Sei G eine Gruppe und $\rho\colon G \to GL_n(\mathbb{C})$ eine zugehörige Darstellung sowie χ der Charakter von ρ. Dann gilt

(i) für $g \in G$: $\quad |\chi(g)| = \chi(1_G) \quad \Leftrightarrow \quad g\rho = \lambda I_n \quad$ mit geeignetem $\lambda \in \mathbb{C}$,

(ii) $ker(\rho) = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1_G)\}$.

Beweis. Wir beweisen beide Aussagen einzeln:

(i) Wir beweisen beide Richtungen nacheinander, sei dazu $g \in G$ mit $ord(g) = m$.

“$\Rightarrow$” Es gelte $|\chi(g)| = \chi(1_G)$. Mit § 9.11, 3. Vortrag (S. 83, 9.11) existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^n$, so dass

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_n \end{pmatrix},$$

wobei jedes w_i nach Satz 6.11 eine m-te Einheitswurzel ist. Dann gilt nach Voraussetzung $|\chi(g)| = |w_1 + \ldots + w_n| = \chi(1_G) = n$. Es folgt

$$n = |w_1 + \ldots + w_n| \leq |w_1| + \ldots + |w_n| = 1 + \ldots + 1 = n$$

Da alle w_i den gleichen Betrag haben und Gleichheit besteht, folgt mit Lemma 6.13

$$w_i = w_j, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Also

$$g\rho = [g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_1 \end{pmatrix} = w_1 I_n.$$

"$\Leftarrow$" Sei $g \in G$ mit $g\rho = \lambda I_n$ für geeignetes $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann muss λ eine m-te Einheitswurzel sein, da $ord(g) = m$ und $(1_G)\rho = (g^m)\rho = (g\rho)^m = (\lambda I_n)^m = I_n$ gelten muss. Damit gilt $\chi(g) = \lambda n$, also $|\chi(g)| = |\lambda n| = |\lambda| n = n = \chi(1_G)$.

(ii) Gem. § 3.3, 1. Vortrag (S.34, 3.3) gilt $ker(\rho) = \{g \in G \mid g\rho = I_n\}$.

"$\subseteq$" Sei $g \in ker(\rho)$, dann gilt $g\rho = I_n$ und damit $\chi(g) = \chi(1_G) = n$, also $g \in \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1_G)\}$.

"$\supseteq$" Sei $g \in \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1_G)\}$. Mit (i) folgt, dass $g\rho = \lambda I_n$ und wegen $\lambda n = \chi(g) = \chi(1_G) = n$ (*ohne Betrag*) folgt $\lambda = 1$, also $g\rho = I_n$ und damit $g \in ker(\rho)$.

□

Definition 6.15 (Kern eines Charakters, treuer Charakter)**.**
Sei G eine Gruppe und χ ein zugehöriger Charakter. Dann bezeichnet man

$$ker(\chi) = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1_G)\}$$

als **Kern von** χ. Mit Theorem 6.14 folgt für eine Darstellung ρ und einen zugehörigen Charakter χ auch

$$ker(\rho) = ker(\chi) \text{ sowie } ker(\chi) \leq G,$$

denn $\rho \colon G \to GL_n(\mathbb{C})$ ist ein Homomorphismus.

Man bezeichnet χ als **treuen Charakter**, wenn gilt $ker(\chi) = \{1_G\}$.

Satz 6.16.
Sei G eine Gruppe und χ ein zugehöriger Charakter. Dann gilt

(i) $\overline{\chi}(g) := \overline{\chi(g)}$ ist ein Charakter von G und

(ii) wenn χ irreduzibel ist, so auch $\overline{\chi}$.

Beweis. Wir beweisen beide Aussagen einzeln:

(i) Wir verstehen die komplexe Konjugation für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ komponentenweise, d.h. $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$. Weiterhin gilt für $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$\overline{AB} = \overline{A}\ \overline{B}, \quad \text{denn} \quad \overline{(AB)_{ij}} = \overline{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}b_{kj}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}}\ \overline{b_{kj}}.$$

Damit ergibt sich, dass auch $\overline{\rho} : G \to GL_n(\mathbb{C}), g \mapsto \overline{(g\rho)}$ eine Darstellung von G ist. Prüfe dazu die Voraussetzung einer Darstellung: Seien $g, h \in G$, dann gilt

$$(gh)\overline{\rho} = \overline{(gh)\rho} = \overline{(g\rho)(h\rho)} = \overline{(g\rho)}\ \overline{(h\rho)} = (g\overline{\rho})(h\overline{\rho}).$$

Also ist

$$sp(g\overline{\rho}) = sp(\overline{g\rho}) = \overline{sp(g\rho)} = \overline{\chi(g)} = \overline{\chi}(g)$$

der Charakter der Darstellung $\overline{\rho}$.

(ii) Ist χ irreduzibel, so ist der zugehörige $\mathbb{C}G$-Modul irreduzibel und damit auch die zugehörige Darstellung ρ. Somit ist auch $\overline{\rho}$ und damit $\overline{\chi}$ irreduzibel. □

Definition 6.17 (Regulärer Charakter)**.**
Der **reguläre Charakter** χ_{reg} einer Gruppe G ist der Charakter des regulären $\mathbb{C}G$-Moduls $\mathbb{C}G$ mit $dim(\mathbb{C}G) = |G|$.

Satz 6.18.
Sei $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$ direkte Summe von irreduziblen $\mathbb{C}G$-Submoduln U_i. Dann ist der Charakter χ_V von V gleich der Summe der Charaktere χ_i der $\mathbb{C}G$-Submoduln $U_1, \ldots, U_r$.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus § 7.10, 2. Vortrag (S.67, 7.10). Zur Wiederholung: Sei $\mathcal{B}_i$ eine Basis für $U_i, 1 \leq i \leq r$. Dann lassen sich diese $\mathcal{B}_i$ kombinieren zu einer Basis $\mathcal{B}$ von V und die Elemente $g \in G$ haben die Form

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [g]_{\mathcal{B}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [g]_{\mathcal{B}_r} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt unmittelbar

$$\chi_V(g) = \chi_1(g) + \ldots + \chi_r(g).$$

□

Theorem 6.19.
Sei $V_1, \ldots, V_k$ eine vollständige Menge von nicht-isomorphen, irreduziblen $\mathbb{C}G$-Moduln. Sei weiter χ_i der Charakter von V_i und $d_i = dim(V_i) = \chi_i(1)$, für $1 \leq i \leq k$. Dann gilt

$$\chi_{reg} = d_1\chi_1 + \ldots + d_k\chi_k.$$

Beweis. Wir schreiben dazu

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$$

als Zerlegung irreduzibler Submoduln. Mit § 11.9, 4. Vortrag (S.100 11.9) gilt dann, dass die Anzahl der U_i mit $U_i \cong V_j$ gleich $dim(V_j)$ ist für $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq k$, also gibt es $dim(V_i)$ U_is die isomorph zu V_i sind:

$$\mathbb{C}G \cong \underbrace{(V_1 \oplus \ldots \oplus V_1)}_{d_1\ mal} \oplus \ldots \oplus \underbrace{(V_k \oplus \ldots \oplus V_k)}_{d_k\ mal}.$$

Nun folgt mit Satz 6.18

$$\begin{aligned} X_{reg} &= \underbrace{\chi_1 + \ldots + \chi_1}_{d_1\ mal} + \ldots + \underbrace{\chi_k + \ldots + \chi_k}_{d_k\ mal} \\ &= d_1\chi_1 + \ldots + d_k\chi_k. \end{aligned}$$

□

Satz 6.20.
Sei χ_{reg} der reguläre Charakter von G, dann gilt

(i) $\chi_{reg}(1_G) = |G|$ und

(ii) $\chi_{reg}(g) = 0$ für $1_G \neq g \in G$.

Beweis. Wir beweisen beide Aussagen einzeln:

(i) Sei $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ und $\mathcal{B} = \{g_1, \ldots, g_n\}$ eine Basis für den regulären Modul $\mathbb{C}G$. Mit Satz 6.11 und Definition 6.17 gilt $\chi_{reg}(1_G) = dim(\mathbb{C}G) = |G|$.

(ii) Sei nun $1_G \neq g \in G$. Dann gilt für $1 \leq i \leq n$ und geeignetes $1 \leq j \leq n$ mit $g_i, g_j \in G$ und $g_i g = g_j$: $i \neq j$, denn $g \neq 1_G$ (per Wiederspruch: falls $g_i = g_j$, einfach g_i auf beiden Seiten kürzen, dann ergibt sich $g = 1_G$, Wiederspruch).

Folglich gilt dann für die i-te Zeile der Matrix $[g]_{\mathcal{B}}$, dass alle Einträge bis auf die 1 in der j-ten Spalte gleich 0 sind. Insbesondere gilt für alle i: $([g]_{\mathcal{B}})_{ii} = 0$, da $g \neq 1_G$ und somit :

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \chi([g]_{\mathcal{B}}) = 0.$$

□

Beispiel 6.21.
Mit dem folgenden Beispiel sollen Theorem 6.19 und Satz 6.20 verdeutlicht werden. Dazu betrachen wir die Gruppe

$$D_6 = \langle a, b, \mid a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle = \{1, a, a^2, b, ab, a^2b\}, \quad |D_6| = 6.$$

Wie in Beispiel 6.10 schon festgestellt, hat D_6 drei irreduzible Charaktere χ_1, χ_2, χ_3. Betrachtet man die zugehörigen Darstellungen ρ_1, ρ_2, ρ_3 und berechnet die jeweiligen Charaktere, so ergibt sich folgende Tabelle:

g	1	a	a^2	b	ab	a^2b
$\chi_1(g)$	1	1	1	1	1	1
$\chi_2(g)$	1	1	1	-1	-1	-1
$\chi_3(g)$	2	-1	-1	0	0	0

Dabei sind χ_1 und χ_2 Charaktere vom Grad 1 und χ_3 vom Grad 2. Mit Theorem 6.19 ergibt sich dann

$$\chi_{reg} = \chi_1 + \chi_2 + 2 \cdot \chi_3$$

und die dazugehörige Tabelle lautet:

g	1	a	a^2	b	ab	a^2b
$\chi_{reg}(g)$	6	0	0	0	0	0

,

was sich mit den Aussagen von Satz 6.20 deckt.

6.1 Permutations-Charaktere

Im Fall, dass $G \leq S_n$ eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n ist, existiert eine einfache Konstruktion des Charakters vom Grad n mittels Permutations-Moduln.

Definition 6.22 (Permutationscharakter von G)**.**
Sei $G \leq S_n$ und V der Permutations-Modul (vgl. § 4.10, 1. Vortrag, S.45) für G über $\mathbb{C}$ mit Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots v_n\}$. Dann gilt

$$v_i g = v_{ig} \text{ für } 1 \leq i \leq n.$$

Folglich ist der ii-Eintrag der Matrix $[g]_\mathcal{B}$ gleich 0 falls gilt $ig \neq i$ und gleich 1 falls gilt $ig = i$. Man definiert den Charakter π von V als

$$\pi(g) := |\{1 \leq i \leq n \mid ig = i\}| =: |fix(g)|.$$

Dabei gilt weiterhin $\pi(g) = sp([g]_\mathcal{B})$. Man bezeichnet nun π als **Permutations-Charakter von G**.

Satz 6.23.
Sei $G \leq S_n$ eine Untergruppe von S_n. Dann ist die Funktion

$$\mu : G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto |fix(g)| - 1$$

ein Charakter von G.

Beweis. Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis des Permutations-Moduls V für G über $\mathbb{C}$. Setze

$$u = v_1 + \ldots + v_n \quad \text{und} \quad U = \langle u \rangle.$$

Dann gilt für alle $g \in G$ weiter $ug = u$. Folglich ist U ein $\mathbb{C}G$-Untermodul von V und man stellt weiter fest, dass U isomorph zum trivialen $\mathbb{C}G$-Untermodul ist. Also ist der Charakter von U der triviale Charakter 1_G. Gemäß dem Satz von Maschke, § 8.1, 2. Vortrag (S.70, 8.1) existiert ein weiteres $\mathbb{C}G$-Untermodul W von V, so dass gilt

$$V = U \oplus W.$$

Sei μ der Charakter von W. Dann gilt mit Satz 6.18 und π als Bezeichung des Charakters von V

$$\pi = 1_G + \mu,$$

also $|fix(g)| = 1 + \mu(g)$ für alle $g \in G$ und damit

$$\mu(g) = |fix(g)| - 1.$$

□