

SEMINAR: DARSTELLUNGSTHEORIE VON LIE-ALGEBREN

Montags 14:30 - 16:00 Uhr, Raum 25.22.02.81, beginnend mit dem 07.10.2024

EINLEITUNG

Es ist eine mathematische Grundidee "Objekte" gemeinsam mit ihren "Wirkungen" zu untersuchen. Dies kommt besonders in der Geometrie und Physik zum Tragen. Hier beschreibt man Symmetrien durch Lie-Gruppen und diese wirken durch lineare Abbildungen auf Vektorräumen. Daraus ergibt sich eine Darstellung der zugehörigen Lie-Algebra und für solche Darstellungen gibt es eine reichhaltige Strukturtheorie. Insbesondere wollen wir die Klassifizierung endlichdimensionaler irreduzibler Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren über den komplexen Zahlen durch sogenannte dominante Gewichte verstehen.

All seminar talks can be given either in German or English.

VORKENNTNISSE

Empfohlene Voraussetzung ist die Vorlesung "Halbeinfache Lie-Algebren" aus dem Sommersemester 2024. Eine Teilnahme ist aber auch ohne Belegung dieser Vorlesung möglich. Melden Sie sich dazu gern per E-Mail.

EINORDNUNG IN DAS STUDIENPROGRAMM

Ich vergebe gerne auf Basis dieses Seminars Bachelorarbeiten. Bitte teilen Sie mir in jedem Fall Ihr Interesse an einer Abschlussarbeit frühzeitig mit.

VORTRAGSPROGRAMM

Weylscher Irreduzibilitätssatz.

Beweisen Sie Weyls Satz, dass endlich-dimensionale Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren vollständig reduzibel sind, ohne Weyls unitären Trick zu benutzen. Führen Sie dazu auch das Casimir-Element ein.

Literatur: [Hum72, Abschnitte 6.2, 6.3]

Abstrakte Gewichtstheorie.

Zu einem gegebenen abstrakten Wurzelsystem, führen Sie Gewichts- und Wurzelgitter ein, definieren Sie dominante, stark dominante und fundamentale dominante Gewichte. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe des Wurzelsystems für die Cartan-Killing-Typen. Sprechen Sie über die Weyl-Gruppen-Wirkung auf den Gewichten, zeigen Sie dass das Gewicht δ (heute eher mit ρ bezeichnet) ein dominantes Gewicht ist. Diskutieren Sie gesättigte Gewichtsmengen.

Literatur: [Hum72, Abschnitt 13]

Universelle einhüllende Algebren und der PBW-Satz.

Führen Sie die universelle einhüllende Algebra einer Lie-Algebra ein und erklären Sie Konstruktion und universelle Eigenschaft. Erklären Sie die Aussage des Satzes von Poincaré–Birkhoff–Witt und dass dieser eine explizite Beschreibung der universellen Einhüllenden liefert. Skizzieren Sie den Beweis (ggf. für ein explizites Beispiel einer Lie-Algebra).

Literatur: [Hum72, Abschnitt 17]

Moduln von höchstem Gewicht.

Erster Vortrag. Definieren Sie Gewichte und Gewichtsräume. Führen Sie Verma-Moduln (“standard cyclic modules”) ein und erklären Sie ihre Struktur. Zeigen Sie Existenz und Eindeutigkeit von Verma-Moduln zu einem vorgegebenem höchstem Gewicht.

Literatur: [Hum72, Abschnitt 20]

Zweiter Vortrag. Erklären Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für die Endlichdimensionalität irreduzibler Moduln von höchstem Gewicht. Bringen Sie die algebraische mit der abstrakten Gewichtstheorie zusammen.

Literatur: [Hum72, Abschnitte 21.1, 21.2, 21.3]

Multiplizitäten und Charaktere.

Erklären Sie Freudenthals Rekursionsformel zur Berechnung von Multiplizitäten und Harish-Chandras Satz, dass zwei Linearformen auf einer CSA genau dann denselben Charakter haben, wenn sie verbunden sind. Die Beweise sind hier lang und technisch. Treffen Sie eigenständig eine Auswahl, welchen Teil der angegebenen Literatur Sie präsentieren wollen.

Literatur: [Hum72, Abschnitte 22 und 23.]

Weylsche Charakterformel.

Zeigen Sie die Weylsche Charakterformel sowie die Weylsche Dimensionsformel. Treffen Sie hierzu ebenfalls eine Auswahl aus der angegebenen Literatur.

Literatur: [Hum72, Abschnitt 24]

Chevalley-Basen und -Gruppen.

Eine Übersicht über Chevalley-Basen in halbeinfachen-Lie-Algebren und wie sie ein “ \mathbb{Z} -Gruppenschema” liefern, das zur Konstruktion von einfachen endlichen Gruppen von Lie-Typ verwendet werden können.

Literatur: [Hum72, Kapitel VII]

ABLAUF DES SEMINARS

Notwendig für die erfolgreiche Teilnahme sind:

- Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Regelmäßige Anwesenheit und aktive Teilnahme. (Stellen Sie bitte immer Fragen, wenn sie etwas nicht verstehen.)
- Suchen Sie mich bitte spätestens zwei Wochen vor Ihrem Vortrag auf, um etwaige Fragen zu klären und den Vortrag durchzusprechen. Den Stoff Ihres Vortrags sollten Sie bis dahin durchgearbeitet und durchdrungen haben. In den letzten beiden Wochen vor dem Vortrag geht es *nur noch* um letzte offengebliebene Fragen und die vortragstechnische Aufbereitung.

HINWEISE ZUR VORBEREITUNG UND ZUM HALTEN DES VORTRAGS

Lesen Sie sich in Ruhe die Hinweise von Professor Lehn aus Mainz durch:

tinyurl.com/2p85jbe5

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung und nutzen Sie Sprechstunden und sonstige Betreuungsangebote. Dadurch vermeiden Sie Unklarheiten über die Kernaussagen, die Ihr Vortrag enthalten soll (Stichwort: Themaverfehlung).
- Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Vortragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkonsistenzen oder Überschneidungen kommt.
- Machen Sie einen Probenvortrag (versuchen Sie irgendwo einen Raum mit Tafel dafür zu bekommen), um Sicherheit zu gewinnen.
- Die Klarheit von Definitionen und Begriffen hat höchste Priorität. Eine unverständliche Definition ist (noch) schlimmer als eine unverständliche Rechnung.
- Versuchen Sie immer den Kern und die Idee einer komplizierten Aussage auszudrücken, bevor Sie ins Detail gehen. Möglichst viele Beispiele machen den Vortrag verständlicher.
- Schreiben Sie lesbar und planen Sie Ihr Tafelbild vorher. Alle Definitionen müssen an der Tafel stehen. Sprechen Sie laut und deutlich.
- Das fachliche Beherrschen des Stoffs ist die Grundlage von allem. Ist diese aber gelegt, versuchen Sie auch einen Vortrag zu halten, dem man gerne zuhört. Kleben Sie nicht zu sehr an Ihrem Zettel. Zeigen Sie Elan. Haben Sie keine Angst vor Zwischenfragen, da Kommunikation mit dem Publikum einen Vortrag immer lebendiger macht. Machen Sie mal eine humorvolle Zwischenbemerkung... Lachen erhöht die Konzentration des Publikums.

LITERATUR

- [Hum72] James Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer GTM 9, 1972.