Freie Gruppen und Gruppenpräsentierungen
Seminar Geometrische Gruppentheorie

Hanna Sophie Hecker

Sommersemester 2025

Definition. Sei G eine Gruppe und $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset G$.
Ein Wort $\omega \in \{X \cup X^{-1}\}^*$ heißt **reduziert**, falls ω keine Teilworte der Form xx^{-1} oder $x^{-1}x$ enthält.
G heißt **frei** über der **Basis** X, falls $G = \langle X \rangle$ und kein reduziertes Wort in $\{X \cup X^{-1}\}^*$ der Identität in G entspricht.
Der **Rang** einer freien Gruppe ist die Kardinalität der Basis X.
Mit $\mathbb{F}_n$ bezeichnen wir eine freie Gruppe mit Rang n.

Satz 1. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine freie Gruppe von Rang n.*

Satz 2 (Universelle Eigenschaft freier Gruppen). *Sei G eine Gruppe und $g_1, \dots, g_n \in G$ beliebig. Sei $\mathbb{F}_n$ freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Dann existiert ein Gruppenhomomorphismus $\phi : \mathbb{F}_n \to G$ mit $\phi(x_i) = g_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.*

Satz 3. *Alle freien Gruppen von Rang n sind isomorph zueinander.*

Korollar. *Wenn G von n Elementen erzeugt wird, ist G ein Quotient von $\mathbb{F}_n$.*

Definition. Ein surjektiver Homomorphismus $\phi : \mathbb{F}_n \to G$, der ein Erzeugendensystem von $\mathbb{F}_n$ auf ein Erzeugendensystem von G abbildet, heißt **Gruppenpräsentierung**.
Ein Element $\omega \in \mathbb{F}_n$ mit $\phi(\omega) = 1$ heißt **Relation**.
Eine Menge $R \subset \mathrm{Kern}(\phi)$ heißt **Menge definierender Relationen**, falls gilt:

$$\mathrm{Kern}(\phi) = \bigcap \{N \trianglelefteq \mathbb{F}_n \mid R \subset N\} = \langle R \rangle^{\mathbb{F}_n}$$

Satz 4. (Ping-Pong-Lemma) Wirke eine Gruppe G auf eine Menge X und sei $\mathcal{S} = S \cup S^{-1}$ für $G = \langle S \rangle$. Für alle $s \in \mathcal{S}$ sei $X_s \subset X$ und es sei $p \in X \setminus \{\bigcup_{s \in \mathcal{S}} X_s\}$. Falls gilt:

(i) $s(p) \in X_s \ \forall s \in S$

(ii) $s(X_t) \subsetneq X_s$ für alle $t \in \mathcal{S} \setminus \{s^{-1}\}$.

dann ist G eine freie Gruppe mit Basis S.

Satz 5. *Der Cayleygraph von $\mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$ ist eine gerichtete Variante von $\mathcal{T}_4$.*

Korollar. *$\mathbb{F}_2$ ist Symmetriegruppe von $\mathcal{T}_4$.*

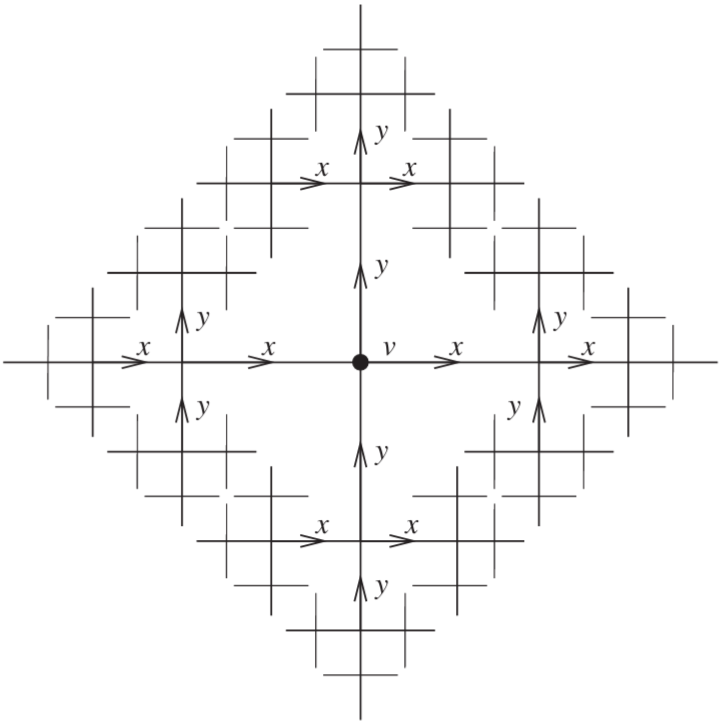
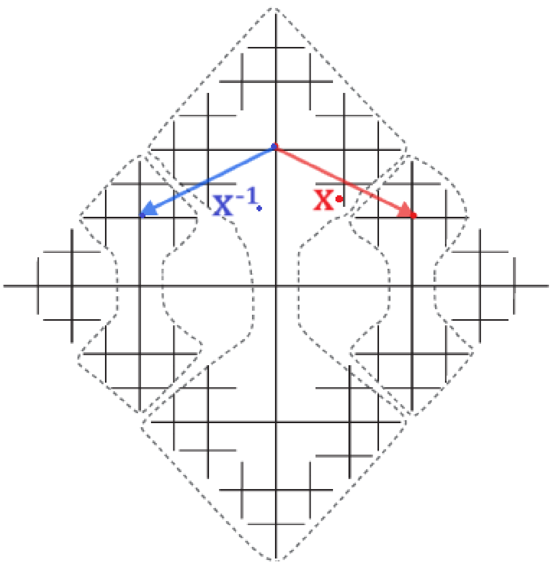
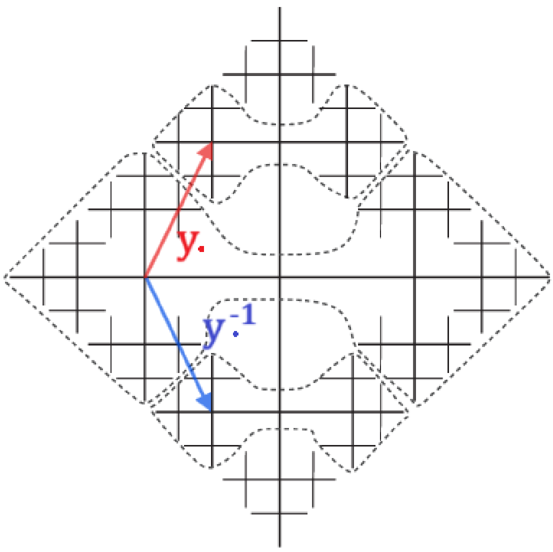


Abbildung 1: Der Cayley-Graph von $\mathbb{F}_2$



(a) Gruppenwirkung von x



(b) Gruppenwirkung von y

Abbildung 2: Gruppenwirkungen