Definition (virtuell)**.** Ist $\mathcal{P}$ eine Eigenschaft von Gruppen, so heißt eine Gruppe G **virtuell** $\mathcal{P}$, falls es eine Untergruppe $H \leq G$ mit $[G : H] < \infty$ gibt, die $\mathcal{P}$ ist.

Beispiele.

- Endliche Gruppen G sind auch *virtuell endlich* (z. B. mit $H = G$), sogar *virtuell trivial.* Hat allgemeiner eine Gruppe G die Eigenschaft $\mathcal{P}$, so ist sie auch *virtuell* $\mathcal{P}$.
- Die unendliche Diedergruppe $D_\infty = \langle a, b \mid b^2 = 1, abab = 1\rangle$ ist *virtuell zyklisch* mit $\mathbb{Z} \cong \langle a\rangle \leq D_\infty$, $[D_\infty : \langle a\rangle] = 2$ (vgl. Vortrag 3).
- Die freie Gruppe $\mathbb{F}_2$ vom Rang 2 ist *virtuell frei vom Rang 3* (Vortrag 5).

Satz (Ziel des Vortrags)**.** *Seien A, B endliche Gruppen. Dann ist $A * B$ virtuell frei.*

Motivation: Für endliche A, B ist $A \oplus B$ endlich. Erzeuge dies als homomorphes Bild von $A * B$, dann hat der Kern des Homomorphismus endlichen Index und „alle Relationen“ von $A * B$ liegen in $A \oplus B$.

$$\begin{tikzcd} \{1\} \arrow[r, dash, "\text{frei}"'] & \mathrm{Kern}(\varphi) \arrow[r, dash, "A\oplus B", "\substack{\text{Relationen,}\\ \text{aber endlich}}"'] & A * B \end{tikzcd}$$

Satz (Universelle Eigenschaft des freien Produkts)**.** *Sind A, B, G Gruppen mit Gruppenhomomorphismen $\varphi_A \colon A \to G$ und $\varphi_B \colon B \to G$, so existiert (genau) ein Gruppenhomomorphismus $\varphi \colon A * B \to G$, sodass das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[dr, "\varphi_A"'] & A * B \arrow[d, "\varphi"] & B \arrow[l, "\iota_B"'] \arrow[dl, "\varphi_B"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Bemerkung. Dies ist analog zur universellen Eigenschaft bzw. Definition freier Gruppen, die als freies Produkt unendlicher zyklischer Gruppen aufgefasst werden können.

Satz. *Sei $\varphi \colon A * B \twoheadrightarrow A \oplus B$ der mithilfe der universellen Eigenschaft aus den Einbettungen $A \hookrightarrow A \oplus B$, $B \hookrightarrow A \oplus B$ induzierte Homomorphismus. Dann ist $\mathrm{Kern}(\varphi)$ eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem*

$$S = \{[a, b] \mid a \in A \setminus \{1_A\}, b \in B \setminus \{1_B\}\}.$$

Korollar (Ziel des Vortrags, genauer)**.** *Seien A, B endliche Gruppen. Dann enthält das freie Produkt $A * B$ einen Normalteiler mit Index $|A| \cdot |B|$, der frei vom Rang $(|A| - 1)(|B| - 1)$ ist.*

Beweis. Mit φ wie oben ist $[A * B : \mathrm{Kern}(\varphi)] = |A \oplus B| = |A| \cdot |B|$ und $\mathrm{Kern}(\varphi)$ ist frei über S mit $|S| = (|A| - 1)(|B| - 1)$. $\square$

Betrachte $\mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_3 = \langle a, b \mid a^4 = b^3 = 1 \rangle$ und dazu den biregulären Baum $\mathcal{T}_{4,3}$, auf dem $\mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_3$ wirkt, wobei a und b jeweils um einen Knoten vom Grad 4 bzw. 3 drehen. Wir zeigen

Proposition (Ziel des Vortrags, konkret)**.** *Sei* $\varphi\colon \mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_3 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$ *der mithilfe der universellen Eigenschaft aus den Einbettungen* $\mathbb{Z}_4 \hookrightarrow \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$*,* $\mathbb{Z}_3 \hookrightarrow \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$ *induzierte Homomorphismus. Dann ist* $\operatorname{Kern}(\varphi)$ *eine freie Gruppe mit freiem Erzeugendensystem*

$$S = \{[a, b] \mid a \in \mathbb{Z}_4 \setminus \{1_A\}, b \in \mathbb{Z}_3 \setminus \{1_B\}\}.$$

Für die eingeschränkte Wirkung $K = \operatorname{Kern}(\varphi) \curvearrowright \mathcal{T}_{4,3}$ gilt

Lemma. *K wirkt frei auf $\mathcal{T}_{4,3}$.*

Beweis. Die Kantenstabilisatoren sind trivial. Die Knotenstabilisatoren sind konjugiert zu $\mathbb{Z}_4$ bzw. $\mathbb{Z}_3$ und solche Konjugate haben mit K trivialen Schnitt. □

Die Charakterisierung freier Gruppen durch freie Wirkungen auf Bäumen liefert direkt

Korollar. *K ist eine freie Gruppe.*

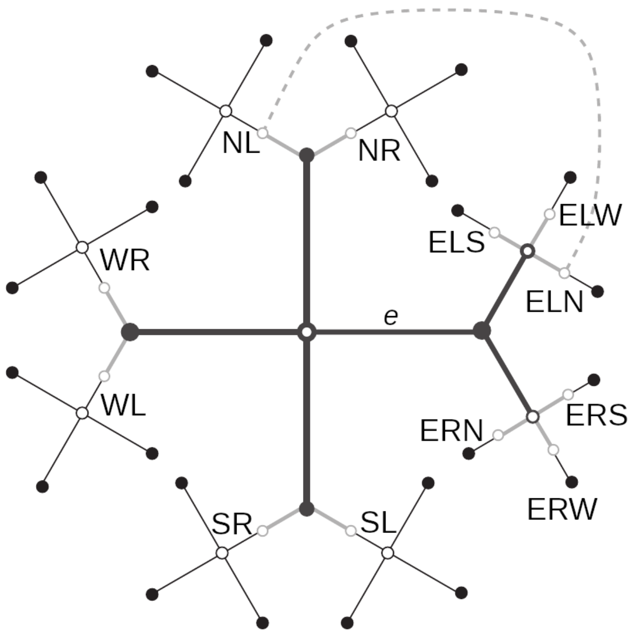

Abbildung 1: KERN (schwarz) und Fundamentalbereich (grau) der Wirkung von K auf $\mathcal{T}_{4,3}$. Der KERN enthält $7 = 3 + 4$ Knoten und der Fundamentalbereich darüberhinaus die benachbarten Halbkanten. Die gestrichelte Linie markiert eine Identifizierung $\sim$ der Halbkante h_{NL}, die den KERN mit NL verbindet, und der Halbkante h_{ELN} durch die Wirkung von K.

Die Identitäten in $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$ ergeben folgende Identifizierungen von Halbkanten.

$$\begin{array}{r|l} [a,b] = 1 \Leftrightarrow ab = ba & h_{\mathrm{SL}} \sim h_{\mathrm{ELS}} \\ a^2 b = b a^2 & h_{\mathrm{WL}} \sim h_{\mathrm{ELW}} \\ a^3 b = b a^3 & h_{\mathrm{NL}} \sim h_{\mathrm{ELN}} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ab^2 = b^2 a & h_{\mathrm{SR}} \sim h_{\mathrm{ERS}} \\ a^2 b^2 = b^2 a^2 & h_{\mathrm{WR}} \sim h_{\mathrm{ERW}} \\ a^3 b^2 = b^2 a^3 & h_{\mathrm{NR}} \sim h_{\mathrm{ERN}} \end{array}$$

Da alle Halbkanten am Rand des Fundamentalbereichs mithilfe von Kommutatoren identifiziert werden, erzeugen diese Kommutatoren ganz K.