

Die Serre's Eigenschaft FA

Seminar Geometrische Gruppentheorie

Nicos Edward Kroustouris

28. Mai 2025

Ziel unseres Vortrags

Wir führen zunächst die Serre's Eigenschaft FA ein. Dann diskutieren wir, wieso endliche Gruppen diese Eigenschaft überhaupt haben. Als Nächstes diskutieren wir wieso die Automorphismengruppe der freien Gruppe $\mathbb{F}_3$ FA hat. Damit können wir folgern, dass dies auch für $GL_3(\mathbb{Z})$ geht. Und wenns noch möglich ist geben wir zuletzt einen kurzen Ausblick, dass es eine Charakterisierung der Eigenschaft FA für abzählbare Gruppen gibt.

1 Endliche Gruppen wirken auf Bäumen

Definition (Bahn). Sei $v \in \mathcal{T}$ jeder Knoten von $\mathcal{T}$ und sei die Bahn von v die Gruppenwirkung unter G , dann definieren wir

$$\mathcal{O}(v) = \{g \cdot v \mid g \in G\}.$$

Definition (Serre's Eigenschaft FA). Sei G eine Gruppe. Dann sagen wir, dass G die Serre's Eigenschaft FA hat, falls für jeden Baum $\mathcal{T}$ mit der Gruppenwirkung $\mathcal{T} \curvearrowright G$ gilt, dass ein $x \in \mathcal{T}$ existiert mit

$$\text{Stab}(x) = G.$$

Theorem. Jede endliche Gruppe erfüllt die Serre's Eigenschaft FA.

2 Serre's Eigenschaft FA und unendliche Gruppen

Definition (Fixpunktuntermenge). Sei G eine Wirkung auf einer Menge X . Dann ist für jedes Element $g \in G$ die Fixpunktuntermenge definiert als

$$\text{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}.$$

Für eine Untergruppe $H \leq G$, setzen wir

$$\text{Fix}(H) = \bigcap_{h \in H} \text{Fix}(h).$$

Lemma. Sei G eine Gruppe, die auf einem Baum $\mathcal{T}$ wirkt, und seien $H, K \leq G$. Dann gilt:

$$\text{Fix}(\langle H, K \rangle) = \text{Fix}(H) \cap \text{Fix}(K)$$

Korollar (α). Sei G eine Gruppe, die auf einem Baum $\mathcal{T}$ wirkt, und seien $H_1, H_2, \dots, H_n \leq G$. Dann gilt:

$$\text{Fix}(\langle H_1, H_2, \dots, H_n \rangle) = \text{Fix}(H_1) \cap \text{Fix}(H_2) \cap \dots \cap \text{Fix}(H_n)$$

Beweis. Wende das vorherige Lemma auf $n \in \mathbb{N}$ Untergruppen an. □

Proposition (Δ -Bedingung). Sei G eine Gruppe, die von drei Untergruppen H_1, H_2 und H_3 erzeugt werden. Wir definieren H_{ij} als die von H_i und H_j erzeugte Untergruppe also $H_{ij} =_{\text{def}} \langle H_i, H_j \rangle$, für $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$. Wenn H_i und H_{ij} endlich sind, dann hat G die Eigenschaft FA.

3 Die Gruppe $Aut(\mathbb{F}_n)$ der freien Gruppe $\mathbb{F}_n$

(3.1) Definition (Elementare Automorphismen). Die elementaren Automorphismen von $Aut(\mathbb{F}_n)$ bestehen aus drei Typen von Abbildungen, welches die Erzeuger der freien Gruppe $\mathbb{F}_n$ transformieren:

1. Permutationsautomorphismen:

$$x_i \sigma = x_{i\sigma}, \quad \sigma \in Sym(n)$$

2. Inversionsautomorphismen:

$$x_j \iota_i = \begin{cases} x_j^{-1}, & i = j \\ x_j, & \text{sonst} \end{cases}$$

3. Nielsen-Automorphismen:

$$x_k \rho_{ij} = \begin{cases} x_i x_j, & k = i \\ x_k, & \text{sonst} \end{cases}$$

Theorem. Die elementaren Automorphismen erzeugen $Aut(\mathbb{F}_n)$.

Korollar. Die Gruppe $Aut(\mathbb{F}_n)$ wird von Ω_n und ρ_{12} erzeugt.

Lemma. Für $n \geq 3$ der Untergruppen H_1, H_2, H_3 von $Aut(\mathbb{F}_n)$ erfüllen die Δ -Bedingung.

Theorem. Die Automorphismengruppe der freien Gruppe $\mathbb{F}_n$, für $n \geq 3$ hat Serre's Eigenschaft FA.

Beweis. Aus dem Korollar(α) und der Δ -Bedingung folgt stets, dass $Aut(\mathbb{F}_n)$ Eigenschaft FA hat. $\square$

Lemma. Wenn G Eigenschaft FA hat, dann hat auch der Quotient von G die Eigenschaft FA.

Beweis. Wir setzen voraus, dass G die Eigenschaft FA hat. Wir setzen $G/N \cong H$. Wir können eine Wirkung von H auf $\mathcal{T}$ stets zu einer Wirkung von G auf $\mathcal{T}$ fortsetzen mittels der surjektiven Abbildung

$$\varphi : G \rightarrow H$$

und damit erhalten wir $G \rightarrow H \rightarrow Aut(\mathcal{T})$. Da G und H das gleiche Bild in $Aut(\mathcal{T})$ haben, und G einen Fixpunkt aufgrund von FA hat, hat H auch diesen Fixpunkt. Also folgt, dass der Quotient von G auch die Eigenschaft FA hat. $\square$

Korollar. Für $n \geq 3$ erfüllt $GL_n(\mathbb{Z})$ die Eigenschaft FA.

Beweis. Wir betrachten den Epimorphismus

$$\varphi : Aut(\mathbb{F}_n) \rightarrow Aut(\mathbb{F}_n/[\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_n])$$

Da $Aut(\mathbb{F}_n)$ für $n \geq 3$ FA hat, folgt, dass auch $Aut(\mathbb{F}_n/[\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_n]) = Aut(\mathbb{Z}^n)$ für $n \geq 3$ FA hat. Also folgt, dass für $n \geq 3$ auch $Aut(\mathbb{Z}^n) \cong GL_n(\mathbb{Z})$ FA hat. Also folgt die Behauptung. $\square$

4 Charakterisierung der Eigenschaft FA für abzählbare Gruppen

Theorem. Sei G eine abzählbare Gruppe. Dann besitzt G die Serre's Eigenschaft FA genau dann, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- (1) $G \not\cong G_1 *_A G_2$
- (2) $\nexists N \trianglelefteq G : G/N \cong \mathbb{Z}$
- (3) G ist endlich erzeugt.