Notation:

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$
- $D_n \to$ Symmetrien n-Eck
- $SYM_n \to$ Symmetrische Gruppe auf n Elementen
- $A_n \to$ alternierende Gruppe.

Definition: Gruppenwirkung

$$\left.\begin{aligned} G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g.x \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\forall g,h \in G,\ x \in X \\ &g.(h.x) = (gh).x \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

Homomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \operatorname{Sym}(X) \\ g &\mapsto [x \mapsto g.x]. \end{aligned}$$

Wirkung heißt treu (faithful), falls $\ker(\varphi) = \{1\}$.

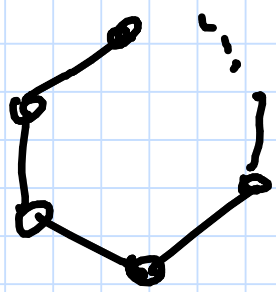
$(\Leftrightarrow \forall g \in G - \{1\}\ \exists x_g \in X : g.x_g \neq x_g)$

Achtung: Das sind **Links-Wirkungen**!

Dies ist unsere **Konvention**

$\rightsquigarrow$ z.B. Zykelmultiplikation in Sym_n läuft nun anders!

$$(12)(35)\circ(234) = (12534) \quad //$$

Bsp: $D_n \curvearrowright$  reg. n-Eck.

Thm (Cayley): Jede Gruppe kann treu als Permutation dargestellt werden.

Bew-idee:

$$G \curvearrowright \overline{G}$$

$$(g, \overline{h}) \mapsto \overline{g \cdot h}.$$

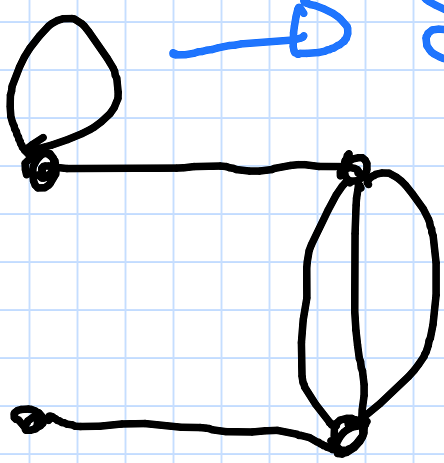
Defn: Ein Graph Γ ist ein Paar $(V(\Gamma), E(\Gamma))$, $V(\Gamma) \cap E(\Gamma) = \emptyset$,

$V(\Gamma)$ = Ecken / **Knoten**

$E(\Gamma)$ = Kanten

und es gibt Abb. $\mathrm{Ends}: E(\Gamma) \to V(\Gamma) \times V(\Gamma)$ die jeder Kante die "Endpunkte" zuweist.

Bsp:

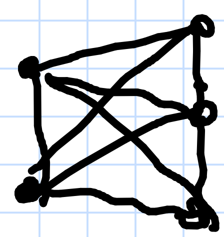
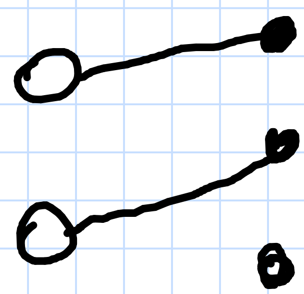


→ Schlaufe

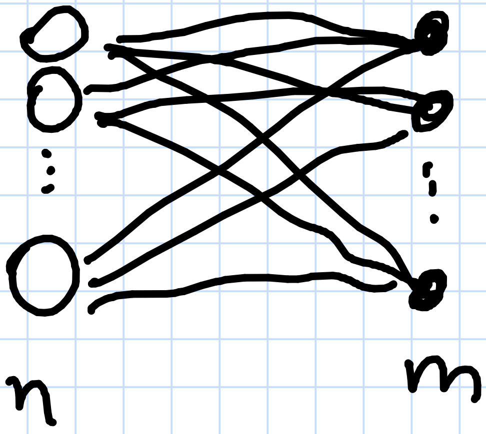
→ Mehrfachkante

Def:

- Graph ohne Schlaufen und Mehrfachkanten **einfach** (simple)
- **vollständig** → zwischen je 2 Knoten gibt es eine Kante.

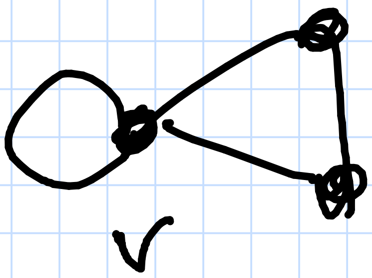
  (Bsp: $K_5 =$ )
- **bipartit** → 

  ↳ keine Kanten zw. ○ und ●

- $K_{n,m} =$ 

- $v \in V(\Gamma)$ **Valenz/Grad** $\mathrm{val}(v)$

  $\rightsquigarrow$ Anzahl der Kanten e mit $\mathrm{Ends}(e) \ni v$, Schlaufen doppelt

Bsp 

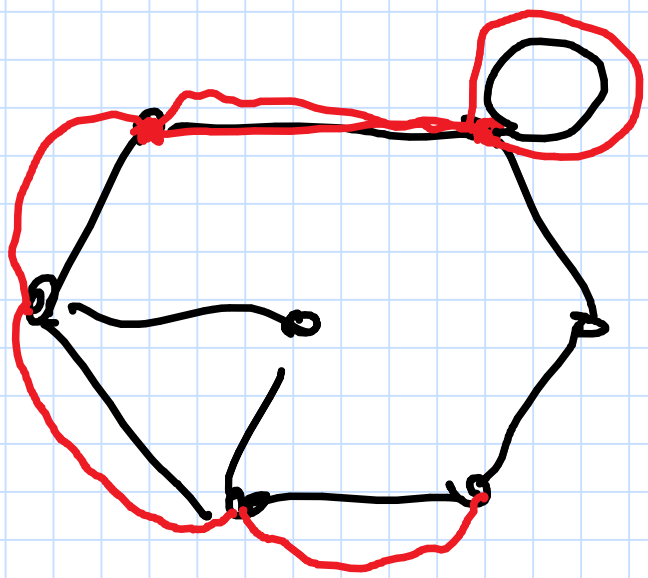
$\mathrm{val}(v) = 4$.

- **lokal endlich** $\mathrm{val}(v) < \infty \quad \forall v \in V(\Gamma)$

- Ein **Pfad/Weg** ist eine Folge

  $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_n, v_{n+1})$

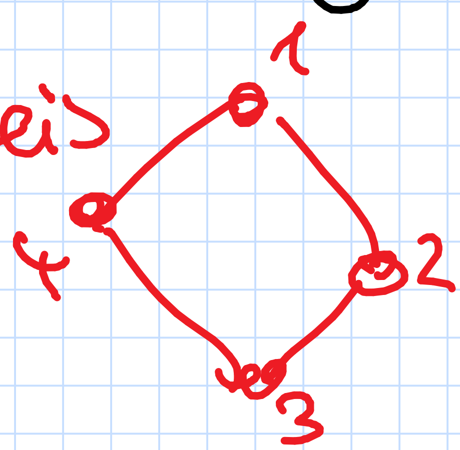
  mit $\mathrm{Ends}(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$

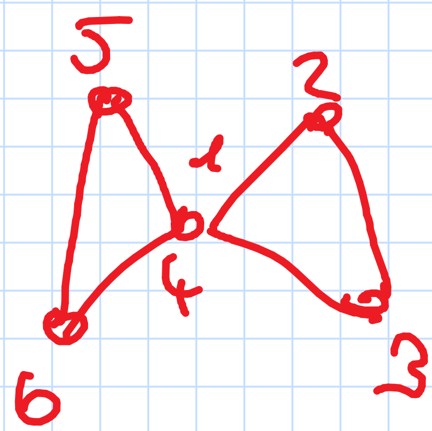
Bsp: 

- Weg ist reduziert, falls $(v_1, e_1, v_2, e_1, v_1)$ <u>nicht</u> als Teilweg auftritt.

- Ein Kreis ist ein Pfad $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_n, v_{\underline{1}})$ mit $v_i \neq v_j \;\; \forall \; i,j \in \{1, \dots, n\}$.

Kreis





kein Kreis

- Ein Graph ist zusammenhängend wenn es einen Pfad von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten gibt.

- Ein **Wald** ist ein Graph ohne Kreise.
- Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Graph ohne Kreise.

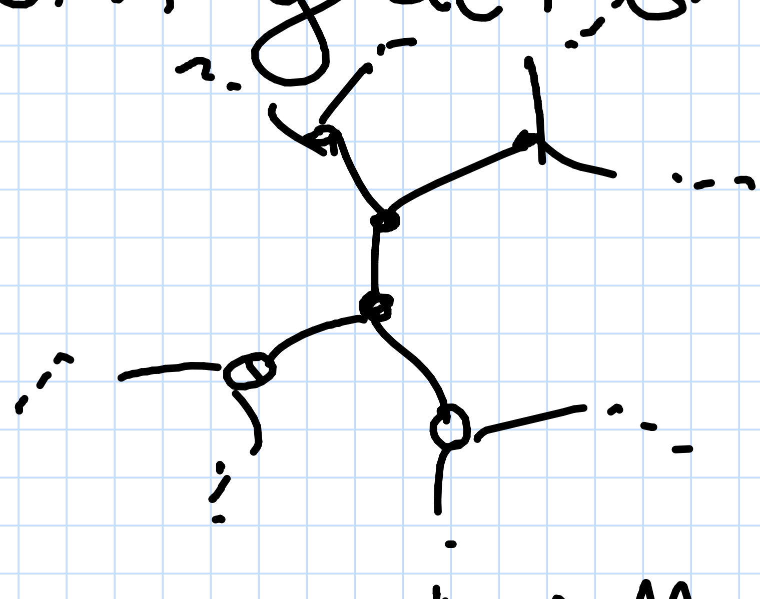
<u>ÜA</u>: Γ endl. + zsh. Dann sind äquivalent:

(1) Γ Baum

(2) $|V(\Gamma)| - |E(\Gamma)| = 1$.

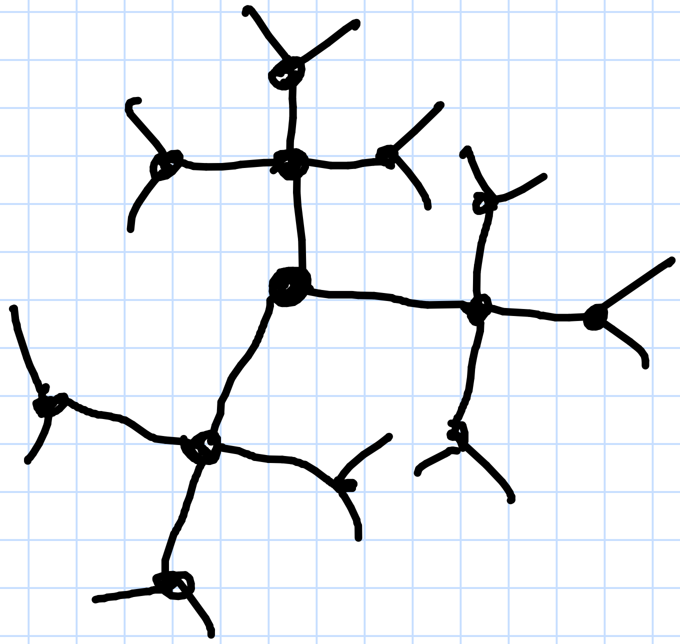
- Baum **regulär**, falls Valenz von jedem Knoten gleich ist

$T_3 :=$



- Baum **biregulär**, falls es 2 Valenzen gibt, die abwechselnd vorkommen

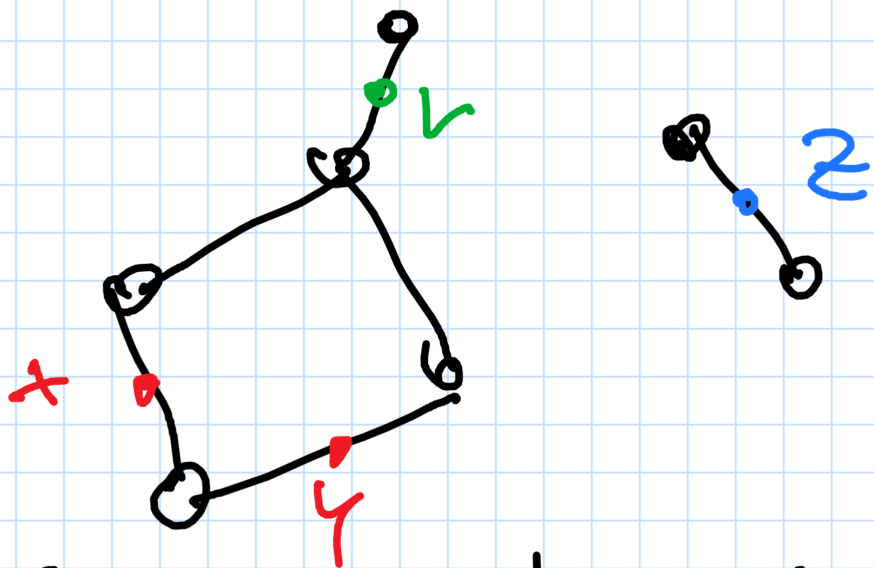
Bsp: $T_{3,4}$



etc.

Graphen als "metrische" Räume:

Anschaulich: Jede Kante $\cong [0,1]$ "verklebt" an Knoten.



$d(x,y) = 1$, $d(y,v) = 2$, "$d(y,z) = \infty$"

Formal: siehe "CW-Komplexe".

• Gerichtete Graph: Jede Kante hat "Richtung".

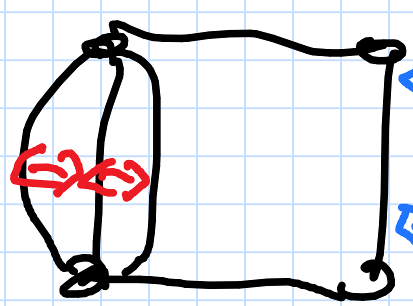
Achtung: Für "Zusammenhang" spielt Richtung **keine** Rolle!

Symmetrien von Graphen:

Symmetrien von Graphen sind Bij. von Knoten zu Knoten und Kanten zu Kanten, die Endp. respektieren, d.h. $\mathrm{Ends}(e) = \{v, w\}$

$$\Rightarrow \mathrm{Ends}(\alpha(e)) = \{\alpha(v), \alpha(w)\}$$

Bsp:

$\mathrm{Sym}\Big($  $\Big) \cong \mathrm{Sym}(3) \oplus \mathbb{Z}_2$

Eine UG $G \leq \mathrm{Sym}(\Gamma)$ ist Ecken-transitiv wenn $\forall v, w \in V(\Gamma)$ $\exists g \in G: \quad g(v) = w.$

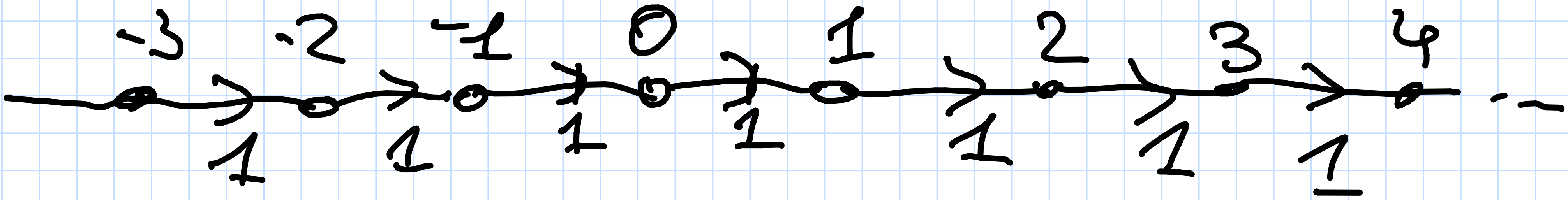
<u>Theorem</u> (Cayley's besseres Thm)
Jede endlich erzeugte Gruppe kann treu dargestellt werden als Symmetriegp eines zusammenhängenden, lokal endl., gerichteten Graphen.

<u>Bew idee</u>: G Gruppe, $S \subseteq G$ endl. mit $\langle S \rangle = G$.
Def'e $\Gamma_{G,S}$ ("Cayley Graph):
$V(\Gamma) = G.$
$E(\Gamma)$: $\exists$ Kante zw. $v, w \in V(\Gamma)$
$:\Longleftrightarrow \exists s \in S: \quad v \cdot s = w.$

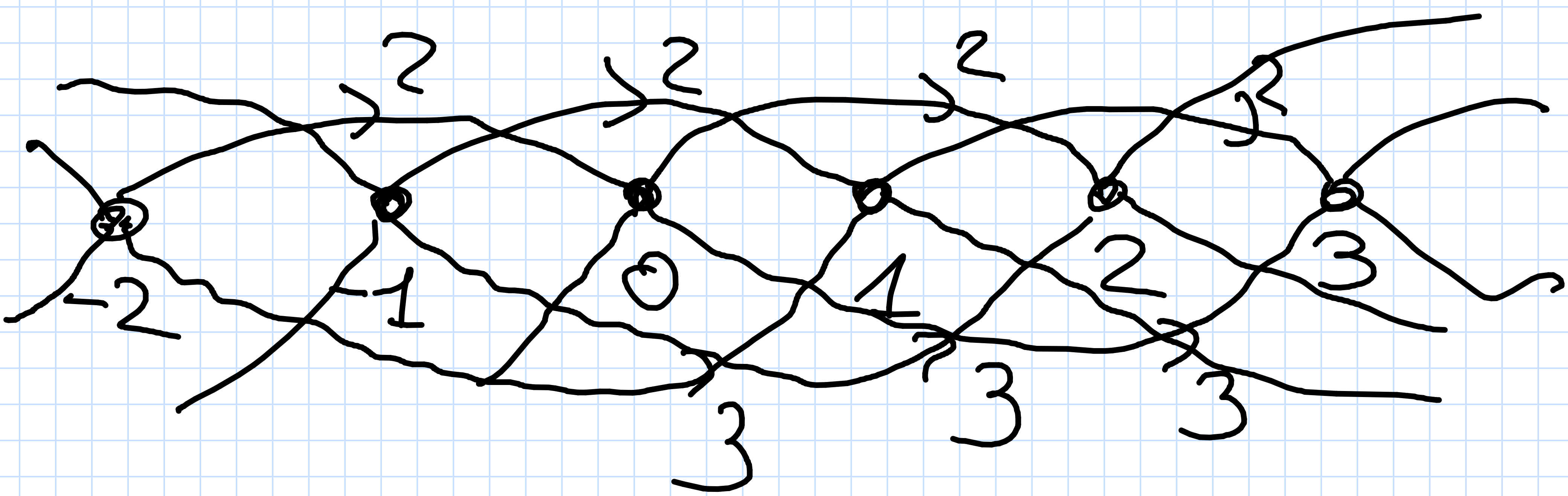
Das erfüllt alles!

Bsp:

- $(\mathbb{Z}, \{1\})$



- $(\mathbb{Z}, \{2,3\})$



Fundamentalbereiche:

Lemma: Sei Γ zsh. Graph, G Gruppe, welche auf Γ operiert.

Dann ex. $\mathcal{F} \subseteq \Gamma$ mit

'metrische' Sichtweise

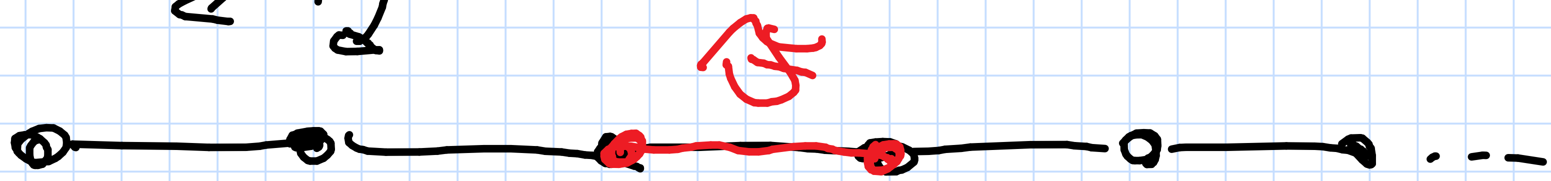
① $\mathcal{F}$ ist abg.

② $\{g\cdot\mathcal{F} \mid g\in G\} \supseteq \Gamma$.

③ $\mathcal{F}$ ist minimal mit ① und ②

$\mathcal{F}$ heißt Fundamentalbereich.

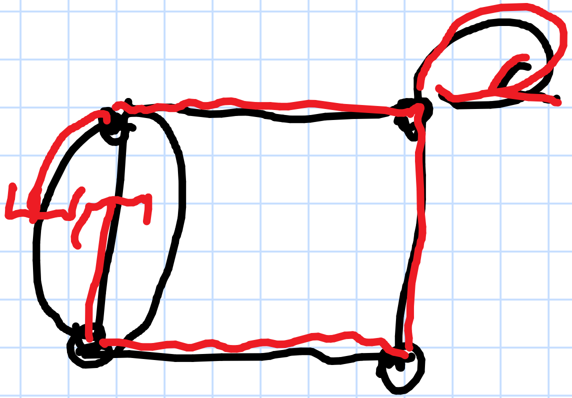
Bsp: $\mathbb{Z} \curvearrowright$

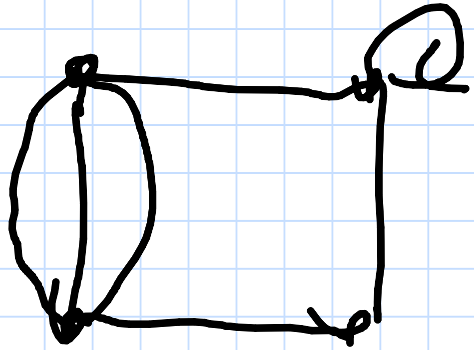


1.58 Achtung falsch!

$G \curvearrowright \Gamma$ Fundamentalbereich $\mathcal{F}$,
mit $g\cdot\mathcal{F}=\mathcal{F} \Rightarrow g=e$.

Ang. $H<G$, und ein Fundamentalber. für die ind. Wirkung von H auf Γ besteht aus n Kopien von $\mathcal{F}$. Dann hat H Index n in G.



$G = \mathrm{Sym}\Big($  $\Big)$

$\rightsquigarrow \; g^{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \Rightarrow g = e.$

$H = \langle (123) \rangle < G = \mathrm{Sym}(3)$

$\mathcal{F}_H = \mathcal{F} \Rightarrow n = 1, \; \lightning$