

Lampenzündengruppe und Kranzprodukte

Plan:

- § 1 Fundamentalbereiche und IZS
- § 2 Motivation
- § 3 halbdirekte Produkte
- § 4 Kranzprodukte
- § 5 Lampenzündengruppe.

§ 1

Theorem: Sei Γ ein zusammenhängender Graph. Sei G eine Gruppe, die auf Γ mit zsh. Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ operiert.

Dann ist $S = \{g \in G \mid g\mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\}$
ein Erzeugendensystem für G .

Bew: Sei $g \in G$ bel. und $v \in \mathcal{F}$ ein Knoten. Wähle nun einen Weg p von v nach $g.v$. Es existiert eine Folge $\{g_0 \mathcal{F} = \mathcal{F}, g_1 \mathcal{F}, \dots, g_n \mathcal{F} = g \mathcal{F}\}$ von Bildern des Fundamentalbereichs so, dass

$$(1) \bigcup_{i=1}^n g_i \mathcal{F} \supseteq p$$

$$(2) g_i \mathcal{F} \cap g_{i+1} \mathcal{F} \neq \emptyset \quad i = 0, \dots, n-1.$$

$$\Rightarrow g_1 \in S.$$

$$g_1 \mathcal{F} \cap g_2 \mathcal{F} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} \cap g_1^{-1} g_2 \mathcal{F} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow g_1^{-1} g_2 \in S$$

$$\Rightarrow g_2 \in S \quad \text{etc.} \quad \square$$

Bsp:

(a)

$\mathbb{Z}$

$\rightarrow$

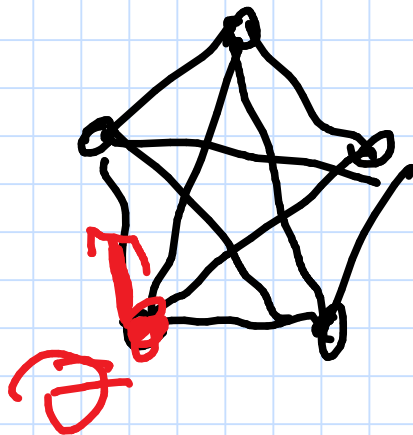


$$\Rightarrow S = \{1, -1\}.$$

(b)

$\text{Sym}(\bar{5})$

$\rightarrow$



$$\Rightarrow \text{Sym}(4) \subseteq S$$

$$\text{aber } \text{Sym}(5) = \langle (12), (23), (34), (45) \rangle$$

$\rightarrow$ Methode nicht immer "effektiv".

§2 Motivation

Wir wollen eine Gruppe mit einigen "kuriosen" Eigenschaften konstruieren.

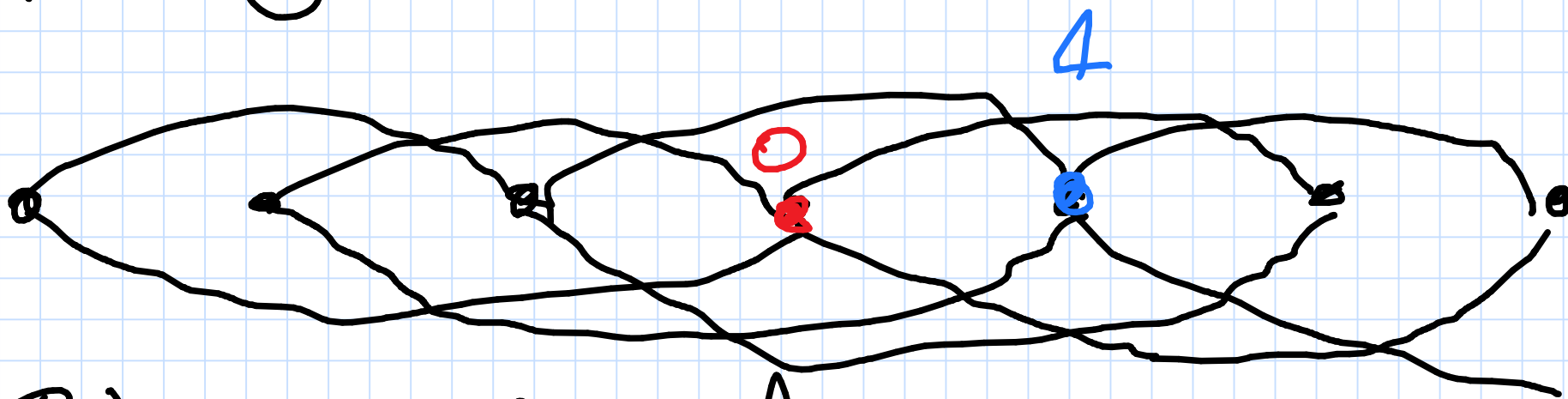
① Die Gruppe ist endlich erzeugt, aber nicht endlich präsentiert.

② "Sackgassen" im Cayley-Graphen:

Defn: Eine Sackgasse im Cayley-Graphen einer Gruppe ist ein Knoten v so, dass für alle Nachbarn w von v gilt, dass $d(e, v) \geq d(e, w)$.

typisch für endliche Gruppen und
"zu große Erzeugendensysteme"

Bsp: $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$



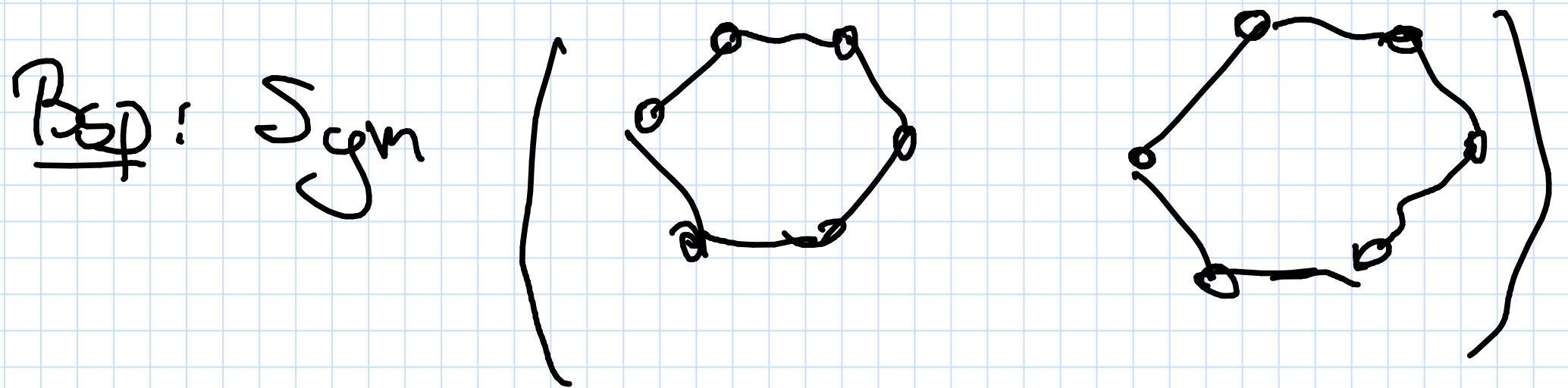
Beh: 4 ist Sackgasse:

$$d(0, 1) = 2 = d(0, -1) = d(0, 4)$$

$$d(0, -2) = 1 = d(0, 3)$$

Die Lampenanzündgruppe hat dieses Verhalten für ein minimales EZS!

§3 halblineare Produkte



$$\cong D_6^2 \rtimes_{\varphi} \text{Sym}(2)$$

Was heißt das?

→ Elemente haben die Form

$[d, \sigma]$, $d \in D_6^2$, $\sigma \in \text{Sym}(2)$,
werden aber nicht komponenten-
weise multipliziert, sondern "via φ ".
 φ ist ein Hom. $\text{Sym}(2) \rightarrow \text{Aut}(D_6^2)$.

Hier: $\varphi(12) = [(d_1, d_2) \mapsto (d_2, d_1)]$.

i.A.: $H \rtimes_{\varphi} K$

$$[h_1, k_1] \cdot [h_2, k_2]$$

$$= [h_1 \cdot \varphi_{k_1}(h_2), k_1 \cdot k_2].$$

$\leadsto$ Gruppe, "halbdirektes" / semidirektes Produkt.

Theorem: Sei $G = H \rtimes_{\varphi} K$. Dann gilt:

- ① $K \hookrightarrow G$, $\text{im}(K) \leq G$ Untergruppe
- ② $H \hookrightarrow G$, $\text{im}(H) \trianglelefteq G$ Normalteiler
- ③ $G / \text{im}(H) \cong K$
- ④ $[e, k] \cdot [h, e] \cdot [e, k]^{-1} = \varphi_k(h).$

§4 Kranzprodukte ("Wreath products")

Definition: Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine Gruppe.

Die **direkte Summe** $\bigoplus_{i \in I} G_i$ ist
die Gruppe $\{ (g_i)_{i \in I} \mid g_i \neq e \text{ für endl. viele } g_i \}$
mit komponentenweiser Verknüpfung.

Definition: Seien G, H Gruppen. Das

Kranzprodukt $G \wr H$ ist das
halbdirekte Produkt $\bigoplus_{h \in H} G \rtimes_{\varphi_h} H$,

wobei H per Index shift auf G
operiert. D.h. $\varphi_h((g_h)_{h \in H})$

$$= (g_{h^{-1} \cdot h})_{h \in H}.$$

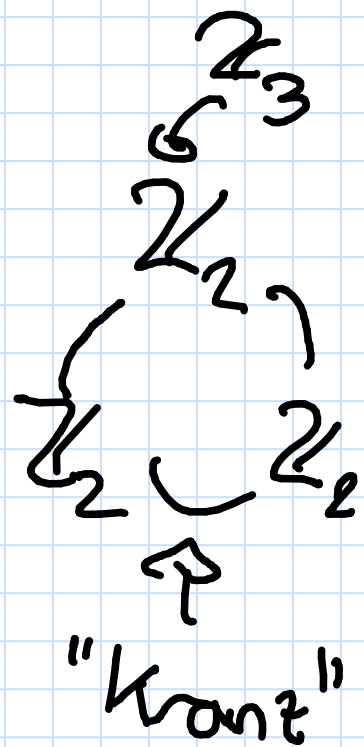
Beispiel: $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$. Name:

$$[(0,1,1), 1] \cdot [(1,0,0), 1]$$

$$= [(0,1,1) + \varphi_1((1,0,0)), 1+1]$$

$$= [(0,1,1) + (0,0,1), 2]$$

$$= [(0,1,0), 2]$$



§ 5 Die Lampenanzündgruppe.

Definition: Die **Lampenanzündgruppe**
 L_2 ist gegeben durch $L_2 := \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$.

Lemma: $L_2 \cong \langle a, t \rangle$ mit

$$a = [(\dots 0, 0, 1, 0, 0, \dots), 0]$$

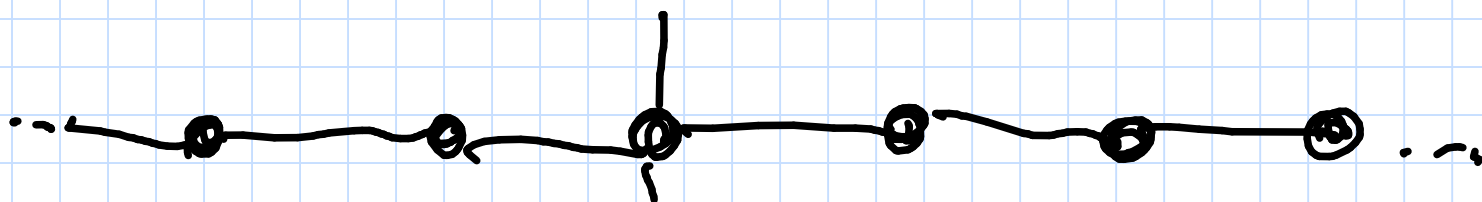
$$t = [(\dots 0, 0, \dots), 1].$$

Bild eines Elements:

Beginne mit $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$



markiere 0 durch "1"

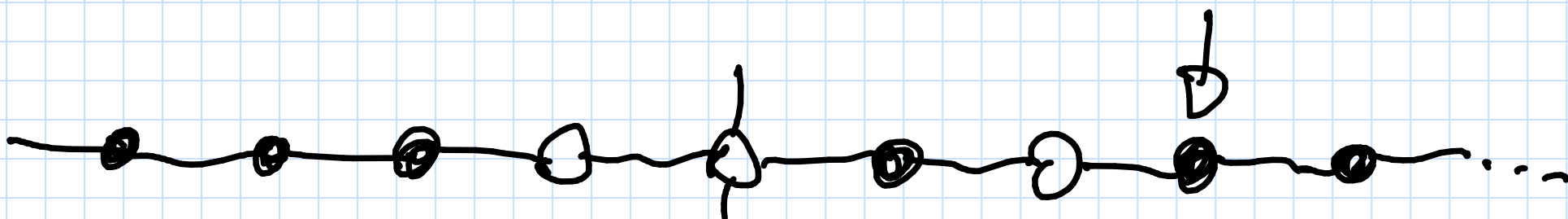


$$[(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}, t] \in L_2$$

$\leadsto$ markiere Knoten t mit $\downarrow$

und die Knoten mit $a_i \neq 0$ mit $\circ$.

z.B. $[(-1, 0, 2), 3]$

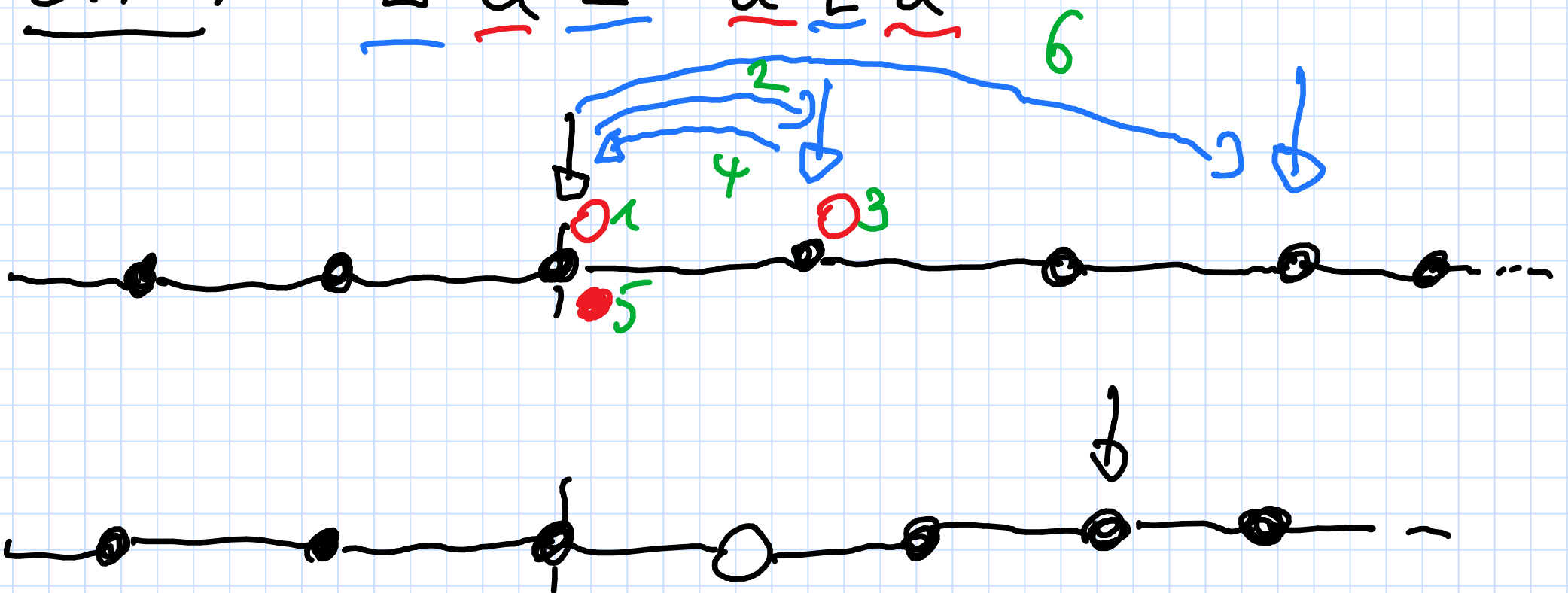


Wieder Name?

Es gibt eine unendlich lange Straße mit Laternen. Ein Lampenanzünder geht an ihr entlang ($\rightarrow t$) und zündet gewisse Lampen an / macht sie aus ($\rightarrow a$).

Das hilft uns bei der Multiplikation und bei der Bestimmung eines Bildes eines Elements!

z.B.: $\underline{t^3} \underline{a} \underline{t^{-1}} \underline{a} \underline{t} \underline{a}$



also: $t^3 a t^{-1} a t a$

$$= [(\underbrace{1, 0, 1, 0, \dots}_{\text{Index 1}}, 3).$$

Zurück zur Motivation:

① $L_2 = \langle a, t \mid (a t^n a t^{-n})^2, n \in \mathbb{Z} \rangle$

ist eine natürliche, unendliche

Präsentierung.

Es ist plausibel, dass keine endliche ex. kann, aber nicht leicht zu zeigen. Es gilt sogar:

Thm: Seien A, B endlich präsentierte Gruppen. Dann ist $A \wr B$ endlich präsentierbar genau dann, wenn A trivial oder B endlich ist.

② Sackgassen:

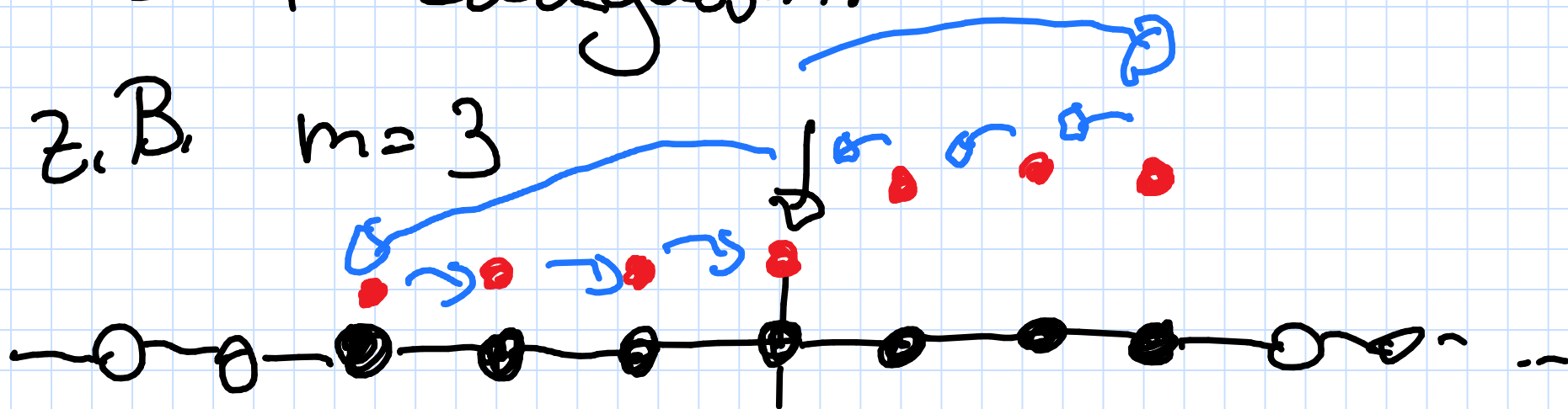
- Beweise über Normalformen und Vorträgen.

Ergebnis: Knoten der Form

$$d_m = (at)^n a t^{-m} (t^{-1}a)^m t^m$$

Sind Sackgassen!

z.B. $m=3$



Wieso macht jede Kluft mit a oder $t^{\pm 1}$ das kürzer?

- $a \rightarrow$ letztes a weglassen
- $t \rightarrow$ "andersteren" + mit a beginnen
- $t^{-1} \rightarrow$ mit a beginnen, letztes t weglassen.