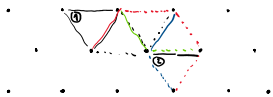


G.V.: Wir fassen $V = \mathbb{R}^2$ bzw $V = \mathbb{C}$ als einen zwei-dimensionalen euklidischen $\mathbb{R}$ -Vektorraum. D.h.: ein 2-dim. $\mathbb{R}$ -VR mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
 $(x,y)^T \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$

Ziel: Wir wollen mit Hilfe von „Spiegelungen“ erklären, wie man die zwei dimensionale Ebene überdecken kann

Bild: Wir gehen von Dreieck $\triangle$ zu $\triangle \oplus$ anhand Spiegelungen



1. Definition:

(i) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metr. Räume. Eine Isometrie ist eine Abb. $f: X \rightarrow Y$ mit $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x') \quad \forall x, x' \in X$

(ii) Das orthogonale Komplement zu einem UVR $U \subseteq V$

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0, \forall u \in U\}, \text{ wobei: } \langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, v = (v_1, v_2)^T, w = (w_1, w_2)^T \\ (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

(iii) Eine Spiegelung um einen UVR $U \subseteq V$ ist eine

$$\text{Abbildung } s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y)^T \mapsto s(x, y) := \begin{cases} (x, y)^T, & \text{falls } (x, y) \in U \\ -(x, y)^T, & \text{falls } (x, y) \in U^\perp \end{cases} \quad \text{bzgl. einer}$$

Basis $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 \in U$ und $v_2 \in U^\perp$. Wir bezeichnen U als Spiegelungslinie

(iv) Eine Verschiebung / Translation ist eine Abb. $\tau_v: V \rightarrow V$
 $x \mapsto \tau_v(x) = x + v, v \in V.$

Bem.:

• Verschiebungen und Spiegelungen sind Isometrien und Isometrien sind injektiv $\Rightarrow$ Sp. und Vers. sind injektiv

• Sp. sind lin., dann gilt aus L.A. + Sp. sind inj. und $\text{Sp.} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$, $\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \Rightarrow$ Sp. sind surjektiv $\Rightarrow$ Sp. sind bij. außerdem gilt: Ist $s \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ eine Spiegelung, so gilt $s \circ s = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$.

• Versch. sind $\forall v \in V \setminus \{0\}$ nicht lin., aber trotzdem bijektiv. und die

Menge $\mathcal{T} := \{\tau_v: V \rightarrow V \mid \tau_v \text{ ist eine Versch.}\} \cong \mathbb{R}^2$ durch die Abb.

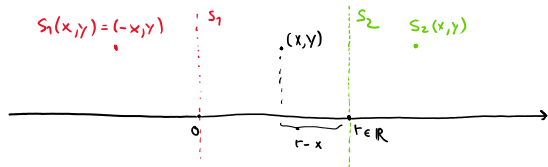
$$\phi: (\mathcal{T}, \circ) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, +), \text{ somit ist } \text{ord}(\tau_v) = \infty \quad \forall v \in V \setminus \{0\}. \\ \tau_v \longmapsto v$$

• Durch Verknüpfung mit einer Versch. kann man eine Spiegelung um einen beliebigen affinen Unterraum von V erzeugen. D.h.: $\tau_v \circ s$, wobei τ_v eine Versch.

und s eine Spiegelung ist.

Bsp.: Sei: $V = \mathbb{R}^2$ und $s_1, s_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ spiegeln, $r \in \mathbb{R}$

$$s_1(x, y) = (-x, y) \quad s_2(x, y) = (x, -y)$$



$$S_2(x,y) = (r,0) + (r-x,y) = (2r-x,y) = (2r,0) + (-x,y) = (2r,0) + S_1(x,y) = (\tau_{(2r,0)} \circ S_1)(x,y)$$

Es gilt weiter hin: $(S_1 \circ S_2)(x,y) = S_1(2r-x,y) = (x-2r,y) = (x,y) + (-2r,0) = \tau_{(-2r,0)}(x,y)$

sowie $(S_2 \circ S_1)(x,y) = S_2(-x,y) = (2r+x,y) = (x,y) + (2r,0) = \tau_{(2r,0)}(x,y)$

Lemma 0:

1) $(S_1 \circ S_2)^n = \tau_{(-2rn,0)}$, $n \in \mathbb{N}_0, r \in \mathbb{R}$

2) $(S_2 \circ S_1)^n = \tau_{(2rn,0)}$

3) $(S_2 \circ S_1)^{n-1} \circ S_2 = \tau_{(2rn,0)} \circ S_1$, ist eine Spiegelung um $x=rn$

4) $(S_1 \circ S_2)^n \circ S_1 = \tau_{(-2rn,0)} \circ S_1$, ist eine Spiegelung um $x=-rn$

Beweis: 1) und 2)

I.A.: $n=0$: $(S_1 \circ S_2)^0 = id_K = (S_2 \circ S_1)^0$ ✓
 $n=1$: siehe oben

I.S.: $n \rightarrow n+1$ $\forall (x,y) \in V$. I.V.
 $(S_1 \circ S_2)^{n+1}(x,y) = (S_1 \circ S_2) \circ (S_1 \circ S_2)^n(x,y) \stackrel{I.V.}{=} (S_1 \circ S_2) \circ \tau_{(-2rn,0)}(x,y) = (S_1 \circ S_2)(x-2rn,y)$

$$= (x-2rn-2r,y) = (x-2r(n+1),y) = \tau_{(-2r(n+1),0)}(x,y) \quad \text{um}$$

$$(S_2 \circ S_1)^{n+1}(x,y) = (S_2 \circ S_1) \circ (S_2 \circ S_1)^n(x,y) \stackrel{I.V.}{=} (S_2 \circ S_1) \circ \tau_{(2rn,0)}(x,y) = (S_2 \circ S_1)(x+2rn,y)$$

$$= (x+2rn+2r,y) = (x+2r(n+1),y) = \tau_{(2r(n+1),0)}(x,y)$$

3) $(S_2 \circ S_1)^{n-1} \circ S_2 = \underbrace{(S_2 \circ S_1)^n}_{\stackrel{I.V.}{=} \tau_{(2rn,0)}} \circ (S_2 \circ S_1)^{-1} \circ S_2 = \tau_{(2rn,0)} \circ \underbrace{(S_1^{-1} \circ S_2^{-1})}_{= S_1 \circ S_2} \circ S_2 = \tau_{(2rn,0)} \circ S_1$ um für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$(x,y) \stackrel{!}{=} (\tau_{(2rn,0)} \circ S_1)(x,y) = \tau_{(2rn,0)}(-x,y) = (-x+2rn,y) \Leftrightarrow x = -x+2rn \Rightarrow x = rn, r \in \mathbb{R} \text{ um } n \in \mathbb{N}_0$$

4) $(S_1 \circ S_2)^n \circ S_1 \stackrel{I.V.}{=} \tau_{(-2rn,0)} \circ S_1$ um für geeignetes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt: $(x,y) \stackrel{!}{=} (\tau_{(-2rn,0)} \circ S_1)(x,y) = \tau_{(-2rn,0)}(-x,y)$
 $= (-x-2rn,y) \Leftrightarrow x = -x-2rn \Rightarrow x = -rn, r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$

Satz 1 Die von der Menge $\{S_1, S_2, S_1\}$ erzeugte Gruppe ist isomorph zu D_∞

Beweis: zunächst zeigen wir, dass $\langle S_1, S_2, S_1 \rangle$ ein Semi-direktes Produkt von $\langle S_1, S_1 \rangle$ und $\langle S_2 \rangle$.

Sei $G := \langle S_1, S_2, S_1 \rangle$ mit $(G, \circ)$, $\circ$ ist Verknüpfung von Abbildungen. Dann ist

$\langle S_1 \rangle = \{S_1, id\}$ denn $ord(S_1) = 2$ ist um $\langle S_2, S_1 \rangle = \langle \tau_{(2r,0)} \rangle \cong \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R} \Rightarrow ord(\tau_{(2r,0)}) = \infty$.
sind beide zyklische Untergruppen von G .

$(SD_1) \langle S_1 \rangle \cdot \langle S_2, S_1 \rangle = \{S_1^k (S_2, S_1)^l \mid k, l \in \mathbb{Z}\} = G$ ✓

(SD_2) Zeige $\langle S_2, S_1 \rangle \trianglelefteq G$ sei $g \in G$ mit $g \stackrel{SD_1}{=} S_1^k (S_2, S_1)^l$, $k, l \in \mathbb{Z}$ und $g^{-1} = (S_1, S_2)^l S_1^k$

sei jetzt $(S_1, S_2)^m \in \langle S_2, S_1 \rangle$ beliebig und betrachte:

$$S_1^k (S_2, S_1)^l (S_2, S_1)^m (S_1, S_2)^l S_1^k = S_1^k \tau_{(2rm,0)} S_1^k = \tau_{(2rm,0)} S_1, k \equiv 1$$

Sei jetzt $(s_1 s_1)^k \in \langle s_2 s_1 \rangle$ beliebig und betrachte:

$$s_1^k \underbrace{(s_2 s_1)^k (s_2 s_1)^m (s_1 s_2)^k s_1^k}_{= \tau_{(2r,0)}} = s_1^k \tau_{(2r,0)} s_1^k = \begin{cases} s_1 \tau_{(2r,0)} s_1, & k \equiv 1 \\ \tau_{(2r,0)} \in \langle s_2 s_1 \rangle, & k \equiv 0 \end{cases} \checkmark$$

Sei: $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ bel., dann ist $s_1 \tau_{(2r,0)} s_1 (x, y) = s_1 \tau_{(2r,0)} (-x, y) = s_1 (-x + 2r, y) = (x - 2r, y) = \tau_{(-2r,0)}(x, y) \Rightarrow$

$$\langle s_2 s_1 \rangle \trianglelefteq G.$$

(SD3) zeige: $\langle s_2 s_1 \rangle \cap \langle s_1 \rangle = \{id\}$. Es reicht zu zeigen $\{id\} \supset \langle s_1 \rangle \cap \langle s_2 s_1 \rangle$. Sei:

$g \in \langle s_1 \rangle \cap \langle s_2 s_1 \rangle$. Da $g \in \langle s_1 \rangle$ ist $g = id$ oder $g = s_1$. Wäre $g = s_1$,

so ist $s_1 \in \langle s_2 s_1 \rangle$ mit $ord(s_1) = 2 \nmid$ weil $\langle s_2 s_1 \rangle \cong (\mathbb{R}, +)$ hat kein Element der Ord. 2.

$$\Rightarrow G = \langle s_2 s_1 \rangle \rtimes \langle s_1 \rangle$$

Nun zeige: $G \cong D_\infty = \langle a, b \mid b^2 = 1, abab = 1 \rangle$. Sei:

$$\psi: G \longrightarrow D_\infty$$

$$s_1 \longmapsto \psi(s_1) = b$$

$$s_2 s_1 \longmapsto \psi(s_2 s_1) = a$$

Sei: $x_1, \dots, x_n \in G$. D.h. $x_j \in \{(s_2 s_1)^{k_j}, s_1^{l_j}\} \quad k_j, l_j \in \mathbb{Z}$, und alle $j = 1, \dots, n$.

und wir definieren

$$x_1 \dots x_n \longmapsto \psi(x_1 \dots x_n) = \psi(x_1) \dots \psi(x_n).$$

Damit ist ψ wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus.

Sei: nun $x \in G \cap \ker \psi \Rightarrow 1 = \psi(x) \Leftrightarrow x \in \langle s_2 s_1 \rangle \cap \langle s_1 \rangle \Rightarrow x = id$.

$\Rightarrow \psi$ ist injektiv.

ψ ist surjektiv, denn für jedes Wort aus $\{a, b\}$ gibt

es dementsprechend: $s_1 = \psi^{-1}(b)$ und $s_2 s_1 = \psi^{-1}(a)$ ein Wort aus $\{s_1, s_2 s_1\}$.

$$\Rightarrow G = \langle s_2 s_1 \rangle \rtimes \langle s_1 \rangle \cong D_\infty.$$

Satz 2: Die von der Menge $\{s_1, s_2 s_1 s_2\}$ erzeugte Untergruppe $H \leq D_\infty$ von Index 2 ist isomorph zu D_∞ .

Beweis: zeige $H = \langle s_1, s_2 s_1 s_2 \rangle \cong D_\infty$ und $[D_\infty : H] = 2$.

• zu $D_\infty \cong H$: Es gilt $s_1^2 = id = s_2^2$ und somit $(s_2 s_1 s_2)^2 = id$. Weiter ist

$$s_1 (s_2 s_1 s_2) = (s_1 s_2)^2 = \tau_{(-2r,0)} \text{ durch Einschränkung } \tau_{(-2r,0)}|_{r=1/2}$$

$$\text{und die Menge der Translationen auf } \mathbb{T}_r = \{ \tau_{(2rn,0)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R} \} \Big|_{r=1/2} \cong \mathbb{Z}$$

$$\text{folgt } D_\infty \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong H.$$

• zu $[D_\infty : H] = 2$: Sei mit $2(n) = s_1 id \dots id$. Dann $(D_\infty) \cong \mathbb{T}_\infty / (D_\infty) \cong D_\infty / 2(n) \cong H \cong H$

Folgt $D_\infty \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong H$.

• Zu $[D_\infty : H] = 2$: Es gilt $Z(D_\infty) = \{1\}$ und somit $\text{Aut}(D_\infty) \cong \text{Inn}(D_\infty) \cong D_\infty / Z(D_\infty) \cong D_\infty \cong H$
 und $\text{Aut}(D_\infty) \cong C_\infty \rtimes C_2 \cong D_\infty$. Nun betrachte $\phi: D_\infty \rightarrow D_\infty$. Dann ist $\phi \in \text{Aut}(D_\infty) \setminus \text{Inn}(D_\infty)$, denn man sieht
 $\forall g \in D_\infty: g s_1 g^{-1} \neq s_2$ und $g s_2 g^{-1} \neq s_1$. Also gilt
 $D_\infty = H \cup s_2 H$ und somit ist $[D_\infty : H] = 2$. $\square$

= Zusatz:

Allgemeinerer Fall: In dem eukl. $\mathbb{R}$ -VR $V = \mathbb{R}^2$ können wir Spiegelungen und Drehungen um einen UVR wie folgt beschreiben:

1) Spiegelungsmatrix: $S_\varphi := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, $\forall \varphi \in [0, 2\pi[$

2) Drehmatrix: $D_\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, $\forall \alpha \in [0, 2\pi[$
 $D_\alpha = S_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. Lemma: Seien D_α Drehungen und S_φ Spiegelungen, um einen UVR $U \subseteq V$, $\alpha, \varphi \in [0, 2\pi[$

Dann gilt:

1. $D_\alpha D_{\alpha'} = D_{\alpha+\alpha'}$
2. $S_\varphi S_{\varphi'} = S_{\varphi-\varphi'}$
3. $D_\alpha S_\varphi = S_{\alpha+\varphi}$
4. $S_\varphi D_\alpha = S_{\varphi-\alpha}$
5. $\det(D_\alpha) = 1 = -\det(S_\varphi)$
6. $D_\alpha^{-1} = D_{-\alpha} = D_\alpha^T$
7. $S_\varphi^{-1} = S_\varphi = S_\varphi^T$

Beweis:

$$1. D_\alpha D_{\alpha'} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha') & -\sin(\alpha') \\ \sin(\alpha') & \cos(\alpha') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\alpha') - \sin(\alpha)\sin(\alpha') & -(\cos(\alpha)\sin(\alpha') + \sin(\alpha)\cos(\alpha')) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha') + \cos(\alpha)\sin(\alpha') & \cos(\alpha)\cos(\alpha') - \sin(\alpha)\sin(\alpha') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\alpha') & -\sin(\alpha+\alpha') \\ \sin(\alpha+\alpha') & \cos(\alpha+\alpha') \end{pmatrix} = D_{\alpha+\alpha'}$$

2., 3., 4. Analog

$$5. \det(D_\alpha) = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

$$\det(S_\varphi) = -(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = -1$$

$$6. D_\alpha^T = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \Rightarrow D_\alpha D_\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \quad D_\alpha^T D_\alpha = (D_\alpha D_\alpha^T)^T = I_2^T = I_2$$

$$\Rightarrow D_\alpha^T = D_\alpha^{-1} \quad \text{und} \quad I_2 = D_0 = D_{\alpha-\alpha} \stackrel{(1)}{=} D_\alpha D_{-\alpha} = D_{-\alpha+\alpha} = D_{-\alpha} D_\alpha$$

$$\Rightarrow D_{-\alpha} = D_\alpha^T.$$

7. Folgt ganz analog wie 6. $\square$

Bemerkung:

Insb. folgt $D_\alpha, S_\varphi \in O_2(\mathbb{R}) \subset GL_2(\mathbb{R})$, wobei: $O_2(\mathbb{R}) = \{M \in GL_2(\mathbb{R}) \mid M^{-1} = M^T\}$,

$$O_2^+(\mathbb{R}) := SO_2(\mathbb{R}) = \{M \in O_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\} \subseteq O_2(\mathbb{R})$$

$$O_2^-(\mathbb{R}) = \{M \in O_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) = -1\} \subseteq O_2(\mathbb{R}) \quad \text{ist}$$

$$O_2^+(\mathbb{R}) =: SO_2(\mathbb{R}) = \{ M \in O_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1 \} \subseteq O_2(\mathbb{R})$$

$$O_2^-(\mathbb{R}) = \{ M \in O_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) = -1 \} \subseteq O_2(\mathbb{R}) \quad \text{ist}$$

So mit Folgt $D_\alpha \in SO_2(\mathbb{R})$ und $S_\varphi \in O_2^-(\mathbb{R}) \quad \forall \alpha, \varphi \in [0, 2\pi[$

3. Satz: Es gilt $O_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R}) \cup O_2^-(\mathbb{R}) = \{ S_\varphi \mid \varphi \in [0, 2\pi[\} \cup \{ D_\alpha \mid \alpha \in [0, 2\pi[\}$

Beweis: Es reicht zu zeigen $O_2(\mathbb{R}) \subseteq SO_2(\mathbb{R}) \cup O_2^-(\mathbb{R})$.

Sei $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$, da $N \in O_2(\mathbb{R})$ ist, ist

$$I_2 = NN^{-1} = NN^T = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} \Rightarrow a^2+b^2=1=c^2+d^2 \text{ und } ac+bd=0$$

$$\text{aus } a^2+b^2=1=c^2+d^2 \text{ folgt } (a,b)^T, (c,d)^T \in S^1 = \{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1 \} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi[\}$$

da $z = e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ existieren $\varphi, \varphi' \in [0, 2\pi[$ mit $(a = \cos(\varphi) \text{ und } b = \sin(\varphi))$ und

$$c = \cos(\varphi') \text{ und } d = \sin(\varphi') \text{ aus } 0 = ac+bd = \cos(\varphi)\cos(\varphi') + \sin(\varphi)\sin(\varphi') = \cos(\varphi - \varphi')$$

$$\Leftrightarrow \varphi - \varphi' \in \{ 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \Rightarrow \varphi = \frac{(2k+1)\pi}{2} + \varphi' = k\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi' \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Dann ist } a = \cos(\varphi) = \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi'\right) = \underbrace{\cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \cos(\varphi') - \underbrace{\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}_{=\cos(k\pi)} \sin(\varphi') = \begin{cases} \sin(\varphi') = d, & k \equiv 1 \\ -\sin(\varphi') = -d, & k \equiv 0 \end{cases}$$

$$\text{und } b = \sin(\varphi) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi'\right) = \underbrace{\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}_{=\cos(k\pi)} \cos(\varphi') + \underbrace{\sin(\varphi') \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = \begin{cases} -\cos(\varphi') = -c, & k \equiv 1 \\ \cos(\varphi') = c, & k \equiv 0 \end{cases}$$

$$\text{Dann ist } N = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \text{ oder } N = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \Rightarrow N \in \{ D_\alpha, S_\varphi \mid \varphi \in [0, 2\pi[\}$$

$$\Rightarrow O_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R}) \cup O_2^-(\mathbb{R}) = \{ D_\alpha \mid \alpha \in [0, 2\pi[\} \cup \{ S_\varphi \mid \varphi \in [0, 2\pi[\}.$$

Folgerung: $O_2(\mathbb{R}) \subseteq GL_2(\mathbb{R})$ ist eine Untergruppe und $SO_2(\mathbb{R})$ ist abelsch (Lemma 2.1)

4. Satz: Sei $D_\alpha \in SO_2(\mathbb{R}) \setminus \{I\}$ eine Drehmatrix, D_α hat genau dann eine endlich Ordnung, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\alpha = \frac{2\pi}{n}$

Beweis:

$$\Leftarrow: \text{Sei } D_\alpha = D_{\frac{2\pi}{n}}, \text{ nach Lemma 2. (1) gilt } D_{\frac{2\pi}{n}}^n = D_{\frac{2\pi}{n}n} = D_{2\pi} = I_2.$$

$$\Rightarrow: \text{Sei } n = \text{Ord}(D_\alpha) \in \mathbb{N} \Rightarrow I_2 = D_\alpha^n = \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix}$$

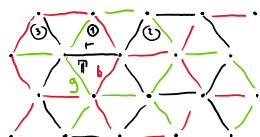
Lemma 2. (1)

$$\Rightarrow 1 = \cos(n\alpha) \Leftrightarrow n\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{N}, \text{ da } n\alpha \in [0, 2\pi[\text{ ist, folgt } k=1$$

$$\text{und somit } \alpha = \frac{2\pi}{n}. \quad \square$$

nicht kollinear

Wir betrachten nun die von drei Spiegelungen r, g und b erzeugte Gruppe auf dem eukl. $\mathbb{R}^2$, und eine gleichseitiges Dreieck $\mathbb{T}$ mit teilsweise Kanten r, g, b



Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^2$ mit den Farben von den ΔT :

Bsp.:

(1) Die Spiegelung T mit r , bringt T zu der Stelle ①

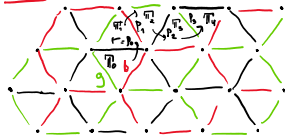
(2) — " ————— rbr , — " ————— ②

(3) — " ————— rgr , — " ————— ③

Sei T' ein beliebiges Δ auf dem $\mathbb{R}^2$.

Definition: Ein Pfad von Dreiecken $T = T_0, T_1, \dots, T_n = T'$ ist eine Menge $\{T_0, T_1, \dots, T_n\}$ mit $\emptyset \neq T_i \cap T_{i+1}$ und $p_i \in T_i \cap T_{i+1}$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$ aus der Menge $\{r, b, g\}$ gebildet wird.

Bsp.:



$$T_0 \xrightarrow{p_0} T_1 \xrightarrow{p_1} T_2 \xrightarrow{p_2} T_3 \xrightarrow{p_3} T_4,$$

offenbar ist $p_0(T_0) = r(T_0)$. Man sieht leicht

$$T_2 = p_1 p_0(T_0) = r b(T_0) \Rightarrow \begin{cases} p_1 = r b r = p_0 b p_0 \\ p_0 = r \text{ und } r^{-1} = r \end{cases}$$

Wirkung von $\{r, b, g\} \curvearrowright T$

$$T_3 = p_2 p_1 p_0(T_0) = r b r(T_0) \Rightarrow \boxed{p_2 = r b r (r b)^{-1} = r b r b r = p_1 p_0 r p_0 p_1}$$

$$T_4 = p_3 p_2 p_1 p_0(T_0) = r b r g(T_0) \Rightarrow \boxed{p_3 = r b r g r b r = p_2 p_1 p_0 g p_0 p_1 p_2}$$

Lemma 2.3: Sei $\{T = T_0, T_1, \dots, T_n = T'\}$ ein Pfad von Dreiecken von T nach T' . Sei $l_i \in \{r, g, b\}$ die Bezeichnung von der Kanten $T_{i-1} \cap T_i$, $i=1, \dots, n$. Dann bringt $l_1 l_2 \dots l_n T$ nach T' .

Beweis: Per Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

I.A.: $n=1$

Wir haben $\emptyset \neq T_0 \cap T_1$ nach Definition, also ex. ein $l_1 \in T_0 \cap T_1$ mit $l_1 \in \{r, g, b\}$, sodass

$$T_1 = p_0(T_0) = l_1(T_0) \quad \text{gilt.}$$

I.S.: $n \rightarrow n+1$

Nach I.V. wissen, dass $p_{n-1} p_0$ bzw. $(l_1 l_2 \dots l_n) T$ zu T_n bringt, damit bringt $p_0 p_1 \dots p_{n-1} T_{n+1}$ zu einem benachbarten Dreieck von T entlang der Kante p_n . Damit bringt

$p_0 p_1 \dots p_{n-1} p_n T_{n+1}$ zu T und somit bringt

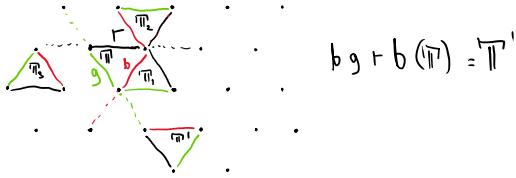
$p_0 p_1 \dots p_n T$ zu T_{n+1} . Benenne $l_{n+1} = p_n$ damit bringt $l_1 \dots l_n l_{n+1} T$ zu T_{n+1} . $\square$

Bemerkung: Lemma 2.3 impliziert zwei wichtige Aspekte

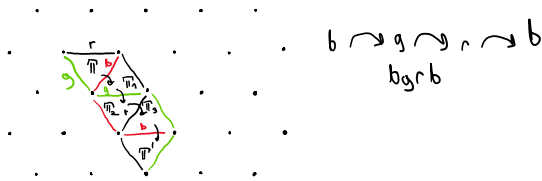
Bemerkung: Lemma 2.3 impliziert zwei wichtige Aspekte

1. Unsere Wirkungen sind stets von links, d.h.: $v \xrightarrow{b} b(v) \mapsto r b(v) \mapsto g r b(v)$
jedoch man kann von links nach rechts die hintereinander Ausführung der Spiegelungen lesen ohne das Ergebnis zu ändern. Zum Beispiel:

Wirkung von Links: $\Pi \xrightarrow{b} \Pi_1 \xrightarrow{r} \Pi_2 \xrightarrow{g} \Pi_3 \xrightarrow{b} \Pi'$



Hintereinander Ausführung von Links nach Rechts:



2. G wirkt transitiv auf Π . D.h.: Sei Π' ein Dreieck auf $\mathbb{R}^2$.

Dann ex. ein $g \in G$ mit $g \cdot \Pi = \Pi'$, wobei

$g = p_1 p_2 \dots p_n$ mit $p_i \in \{r, g, b\} \forall i=1, \dots, n$ ist, d.h. es ex.

ein Weg von Dreiecken $\{\Pi_0 = \Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_n = \Pi'\}$ mit $p_i \in \Pi_{i-1} \cap \Pi_i$

gemäß Lemma 2.3.

Darüber hinaus gibt es einen Satz der eukl. Geom. der besagt, dass jede Isometrie in $\mathbb{R}^2$ kann genau durch ihre Wirkung auf drei nicht kollineare Punkte bestimmt werden. Somit ist die Wirkung

$G \curvearrowright \Pi$ nicht nur transitiv sondern auch scharf transitiv. D.h.:

Aus $h \cdot \Pi = \Pi$ folgt $h = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$.

Aus dieser Bemerkung wissen wir, dass G scharf transitiv auf dem Baryzentrum von Π und somit können wir den Cayley-Graphen mit der konventionellen Notation bestimmen.

Die Bahn $Gx = \{gx \mid g \in G\}$

