

SEMINARVORTRAG

behandelt freie Gruppen aus 2 Perspektiven:

- algebraisch (aus GT bekannt)
- geometrisch: Gruppenwirkung auf Bäume am Beispiel $\mathbb{F}_2$

Wdh. alg. Def.

Def. Sei G Gruppe, $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset G$.

$w \in \{X \cup X^{-1}\}^*$ ~~Wort~~ reduziert: w enthält keine Teilwörter der Form xx^{-1} oder $x^{-1}x$

G frei über Basis X : $G = \langle X \rangle$ und

für $w \in \{X \cup X^{-1}\}^*$ reduziert gilt $w \neq 1_G$.

Rang von G : $|X|$

Def. $\mathbb{F}_n :=$ freie Gruppe von Rang n .

Ziel: Existenz und Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie)

Satz 1: Für $n \in \mathbb{N}$ existiert $\mathbb{F}_n$.

Bew.: $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ pw. verschiedene Symbole.

Def. Äq. rel. auf $\{X \cup X^{-1}\}^*$: $a_1 \dots a_{i-1} a_i^{-1} a_{i+1} \dots a_n$
 $\sim a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n$

Äq. Wörter lassen sich durch Einf./Streichen von xx^{-1} oder $x^{-1}x$ ineinander überführen.

$\mathbb{F}_n := \{[\alpha] \mid \alpha \in \{X \cup X^{-1}\}^*\}$

Gruppenverknüpfung:

$[\alpha][\beta] := [\alpha\beta]$

$\alpha\beta$ Konkatination/Aneinanderhängen von α und β

$[\alpha]^{-1} := [\alpha^{-1}]$

α^{-1} formelles Inverses

z.B. $\alpha = xy \mid \beta = y^{-1} \mid [\alpha][\beta] = [xyy^{-1}] = [x]$
 $[\alpha]^{-1} = [(\alpha)^{-1}] = [y^{-1}x^{-1}]$

Erkennen hier auch, warum Äq. rel. nötig ist und $\mathbb{F}_n$ nicht einfach als Menge der reduzierten Wörter definiert wird: Konkatination zweier reduzierter Wörter ist nicht unbedingt reduziert.

Um Eindeutigkeit zu zeigen, benötigen wir zunächst:

⌈ Satz 2: Universelle Eigenschaft freier Gruppen ⌋

G Gruppe, $g_1, \dots, g_n \in G$ bel. nicht zwingend pw. versch. oder nicht-trivial

Γ_n freie Gruppe mit EZS $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

$\exists$ Hom. $\Phi: \Gamma_n \rightarrow G$ mit $\Phi(x_i) = g_i, 1 \leq i \leq n$

Bew.: $w \in \Gamma_n$ bel., also $w = w_1 w_2 \dots w_n$
mit $w_i \in \{X \cup X^{-1}\}$.

Wir wissen, wohin Φ die Basiselemente w_i schickt.

Wir Def.: $\Phi(w) := \Phi(w_1) \Phi(w_2) \dots \Phi(w_n)$

Ist offensichtlich Gruppenhom.

Müssen zeigen, dass das Bild nicht vom Repr. für w abhängt.

Noch z.z.: Φ wohldef. Ändert sich nichts, wenn wir $x x^{-1}$ einfügen.

Zwei Pkt $w = w_1 w_2 \dots w_n = w_1 w_2 \dots x x^{-1} \dots w_n$

~~$\Phi(w) = \Phi(w_1 w_2 \dots w_n) = \Phi(w_1) \Phi(w_2) \dots \Phi(w_n)$~~

$= \Phi(w_1) \Phi(w_2) \dots \underbrace{\Phi(x) \Phi(x)^{-1}}_1 \dots \Phi(w_n)$

$\stackrel{\Phi \text{ Hom.}}{=} \Phi(w_1) \Phi(w_2) \dots \Phi(x) \Phi(x^{-1}) \dots \Phi(w_n)$

$= \Phi(w_1 w_2 \dots x x^{-1} \dots w_n)$

Man könnte meinen, dieses Vorgehen funktioniert für jede Gruppe. Dem ist nicht so:

Gg. bsp.: $D_\infty = \langle s, t \mid s^2 = 1 \rangle$ unendliche Diedergruppe erzeugt von Spiegelungen s und t

Wollen: $\Phi: D_\infty \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $\Phi(s) = 1$.

Aber $\Phi(1) = \Phi(s^2) = \Phi(s) + \Phi(s) = 2 \nrightarrow$
Hom. muss neutr. El. auf neutr. El. abbilden!

Zeigen jetzt: $\mathbb{F}_n$ eind. bis auf Isomorphie

Satz 3: G, H freie Gruppen von Rang $n \Rightarrow G \cong H$

Bew.: $G = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$
 $H = \langle z_1, \dots, z_n \rangle$

Seien die freien EZS von G und H

Satz 2
 $\Rightarrow \exists \Phi: G \rightarrow H, \Phi(x_i) = z_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$
 $\exists \Psi: H \rightarrow G, \Psi(z_i) = x_i$

$$\Rightarrow (\Psi \circ \Phi)(x_i) = \Psi(z_i) = x_i \Rightarrow \Psi \circ \Phi = \text{id}_G$$

$$(\Phi \circ \Psi)(z_i) = \Phi(x_i) = z_i \Rightarrow \Phi \circ \Psi = \text{id}_H$$

$\Rightarrow \Psi$ und Φ sind bijektiv, also $G \cong H$

Surj. klar, für Inj. betrachte $\Phi(x_i) = \Phi(x_j)$

Dajew. EZS
im Bild

$$\Leftrightarrow x_i = (\Psi \circ \Phi)(x_i) = (\Psi \circ \Phi)(x_j) = x_j$$

□

Wir können darauf aufbauend sogenannte Gruppenpräsentierungen definieren, Grundlage bildet das folgende

Korollar: Wenn G von n El. erzeugt wird, ist G ein Quotient von $\mathbb{F}_n$.

Bew.: $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle, \mathbb{F}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$

Satz 2
 $\Rightarrow \exists \Phi: \mathbb{F}_n \rightarrow G$ mit $\Phi(x_i) = g_i$

$$\{g_1, \dots, g_n\} \subseteq \text{Bild}(\Phi) \Rightarrow G \subseteq \text{Bild}(\Phi)$$

alle Erzeuger

$$\Rightarrow G = \text{Bild}(\Phi) \xRightarrow{\text{1. Isosatz}} \mathbb{F}_n / \text{Kern}(\Phi) \cong G$$

Hom.

wie oben

Def.: Eine surjektive Abb. $\Phi: \mathbb{F}_n \rightarrow G$ heißt Gruppenpräsentierung. der also EZS auf EZS abbildet

$w \in \mathbb{F}_n$ mit $\Phi(w) = 1$ heißt Relation

~~Def.:~~ R ist die Menge definierender Relationen, falls $\text{Kern}(\Phi) = \langle R \rangle$ falls $\langle R \rangle$ der kleinste Normalteiler von $\mathbb{F}_n$ ist, der Φ auf 1 abbildet

Man schreibt dann $G = \langle g_1, \dots, g_n \mid w_1, \dots, w_n \rangle$

EZS def. Relationen

Beispiele: ~~$\langle x, y \mid \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$~~ $\langle x \mid \rangle \cong \mathbb{Z}$
 $\langle x, y \mid x^{-1}y^{-1}xy \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Freie Gruppen danach freier Gruppen ohne Relationen
nur Kommutativität $\Rightarrow$ verwandtes Konzept für abelsche Gruppen

$$D_\infty = \langle x, y \mid x^2, y^2 \rangle$$

$$= \langle x, y \mid x^2, y^2, xyxy \rangle$$

unendliche Diedergruppe
zwei verschiedene Präsentierungen

alle Erzeuger

$$\Rightarrow G = \text{Bild}(\Phi) \Rightarrow \text{1. Isosatz } \mathbb{F}_n / \text{Kern}(\Phi) \cong G$$

Def.: Eine surjektive Abb. $\Phi: \mathbb{F}_n \rightarrow G$ heißt Homomorphismenabbildung.
wie oben
der Abb. auf E

Das: Symmetriegruppe von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$, also abstands erhaltende Abbildungen, die $\mathbb{Z}$ invariant lassen.

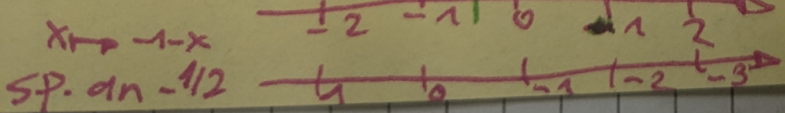
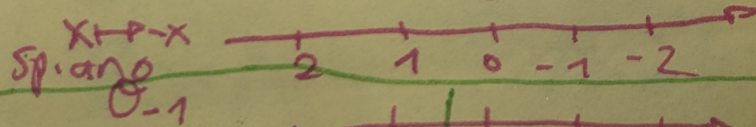
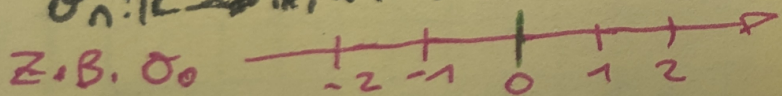
Bestehen aus:

• Translationen um $n \in \mathbb{Z}$:

$$T_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x+n$$

• Spiegelungen: (an $\mathbb{Z}/2$)

$$\sigma_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto n-x$$



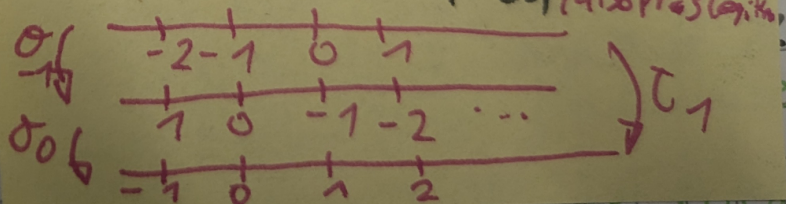
Können aus T_1 und σ_0 alle Elemente erzeugen: $T_k(x) = x+k = T_1^k(x)$
(alle Translationen)

$\sigma_n(x) = -x+2n = (T_k \circ \sigma_0 \circ T_{-n})(x)$
(alle Spiegelungen)
 $S = \langle \sigma_0 \rangle$
 $\sigma = \sigma_0$

Erhalten Präs: $D_{\infty} = \langle s, t \mid s^2, stst \rangle$

Können auch: $s_1 = s$
 $s_2 = st = \sigma_0 T_1 = \sigma_{-1}$

Dann erh. Präs. $D_{\infty} = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2, s_2^2 \rangle$
Geom. ers.: $\sigma_0 \circ \sigma_{-1} = T_1$ (also Präs. $\langle T_1 \rangle$)



$\mathbb{F}_2$ als Symmetriegruppe eines Baums

Betrachten den Zusammenhang zwischen freien Gruppen und Gruppenwirkungen auf Bäume.

[Power-Point Bild Cayley-Graph (1)]

[Satz 5: Der Cayleygraph ~~der freien Gruppe~~ $\mathbb{F}_2$ mit EZS $\{x, y\}$ ist eine gerichtete Variante von T_4 , dem glm. 4-wertigen Baum]

Beweis: • EZS 2 Elemente $\Rightarrow$ 4-wertig
• $\mathbb{F}_2$ frei $\Rightarrow$ kein rel. Wort = 1 $\Rightarrow$ keine Kreise $\Rightarrow$ Baum

Jede Gruppe induziert Gr.wirkung auf ihren Cayleygraphen.
[Korollar: $\mathbb{F}_2$ ist Symmetriegruppe von T_4]

Wollen die Gruppenwirkung genauer verstehen.
Sie entspricht Linksmult. mit einem Erzeuger.

Explizit:

$w \in \mathbb{F}_2$ reduziert $\Rightarrow w = \alpha \cdot w'$ mit $\alpha \in \{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$

$$x \cdot w = x \cdot \alpha \cdot w' = \begin{cases} xw, & x \neq \alpha \\ w', & x = \alpha \end{cases}$$

Graphisch entspricht das einer Verschiebung nach rechts
Analog wirkt x^{-1} als Verschiebung nach links, y nach oben, y^{-1} nach unten.

[Power-Point Slide 2]

Dabei würde ein Punkt an die entsprechende Stelle eine „Komponente“/Teilbaum weiter links verschoben.

Schauen wir uns dies explizit für das Element

$w = xy^{-1}x^{-1}y$ an. [Zuerst wirkt y durch eine Verschiebung nach oben [] Dann wirkt x^{-1} ...

[] y^{-1}
[] x

[] Wir sehen, dass der Endpunkt derselbe ist, wie, wenn wir dem Pfad zum Punkt $w = xy^{-1}x^{-1}y$ folgen.
Der Weg dorthin ist aber ein völlig anderer.

Wir haben nun etabliert, was eine freie Gruppe ist und Zusammenhänge zu Bäumen in Beispielen gesehen.
Nächste Woche wollen wir dann freie Gruppen charakterisieren

und zeigen, dass eine Gruppe genau dann frei ist, wenn ihre Wirkung auf einen Baum frei ist.

Nach Zeit
evtl. Anm.

Wollen freie Gruppen finden. Standardwerkzeug für "enthält freie UG ist":

Satz 4 (Ping-Pong-Lemma)

Sei $X \curvearrowright G$ Gruppenwirkung und sei $S \cup S^{-1} = \emptyset$
 für $X \neq \emptyset$. Für alle $s \in S$ sei $X_s \subset X$ und
 sei $p \in X \setminus \bigcup_{s \in S} X_s$. Falls

(i) $s(p) \in X_s \quad \forall s \in S$

(ii) $s(X_t) \not\subset X_s$ für alle $t \in S \setminus \{s^{-1}\}$

Wenn irgendein $s \in S$ auf p wirkt, landet es im "eigenen" Bereich X_s .
 wirkt s auf Bereich X_t , landet in X_s oder in einem $T \neq M$.

dann ist G freie Gruppe mit Basis S .

Wir beweisen das Lemma hier nicht.
 Wenn wir am Ende noch Zeit haben, betrachten wir ein Anwendungsbeispiel.

Anwendung: $S = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right\rangle \leq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist frei.

(Gerader ist) $S \cong \text{IF}_2$.

Z.Z. kein reduziertes Wort in $\{1, v, v^{-1}, v^{-1}\}^*$ ist äquivalent zum neutralen Element.

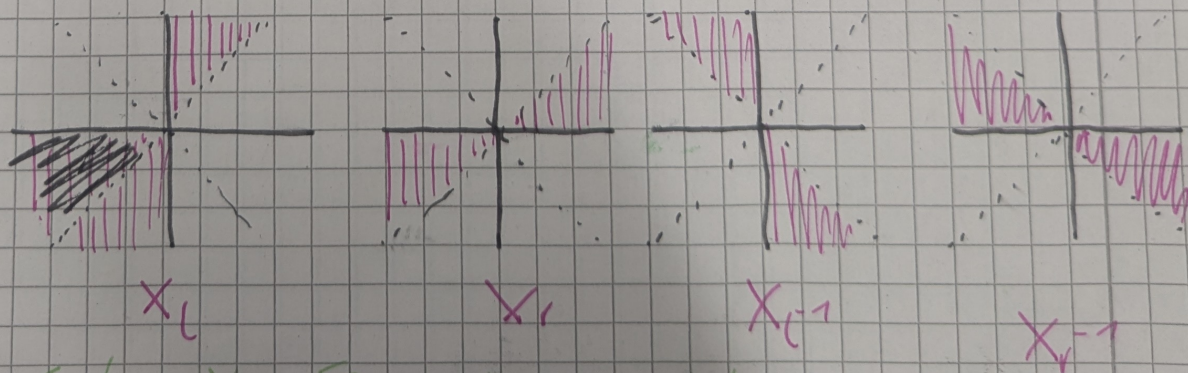
Wir nutzen dazu die Wirkung von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf die euklidische Ebene.

Wir identifizieren Punkte im $\mathbb{R}^2$ mit Vektoren
 und S wirkt via Matrix-Multiplikation.

z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a+b \end{pmatrix}$ also $l \cdot (a, b) = (a, 2a+b)$

(Analog: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ b \end{pmatrix}$ also $r \cdot (a, b) = (a+2b, b)$
 $l^{-1} \cdot (a, b) = (a, -2a+b)$
 $r^{-1} \cdot (a, b) = (a-2b, b)$

Betrachten Teile der Ebene: Geraden $y=x$ und $y=-x$ berandet. Bereiche sind durch Achsen sowie



Sehen: $X_{l^{-1}}$ Sp. von X_l an y -Achse

$X_{r^{-1}}$ Sp. von X_r an x -Achse

Können zeigen: $w \cdot X_y \not\subset X_w$ für $y \neq w^{-1}$ (*)

Bsp.: $l \cdot (0, 1) = (0, 1)$
 $l \cdot (1, 1) = (1, 3)$ $\in X_l \Rightarrow l \cdot X_l \subset X_l$

da Randpunkt und l linear wirkt

Es gilt r^1, l^1, r^1, l^1

Sei nun $w \neq w_1 w_2 \dots w_n$ reduziert.

z.z. $w \neq 1$ bzw. w wirkt nicht wie die Identität in der Ebene

Für $|w|=1$ klar

Haben Wirkungen von r, l, r^1, l^1 hierher ausgerechnet, ist nicht id.

Wir wenden (*) an:

$$w \cdot X_{w_n} = w_1 w_2 \dots w_n \cdot X_{w_n}$$

(*)

$$\stackrel{\neq}{=} w_1 w_2 \dots w_{n-1} X_{w_n} \stackrel{\neq}{=} w_1 w_2 \dots w_{n-2} X_{w_{n-1}}$$

$$\stackrel{\neq}{=} \dots \stackrel{\neq}{=} w_1 X_{w_2} \stackrel{\neq}{=} X_{w_1}$$

$\Rightarrow w \cdot X_{w_n} \stackrel{\neq}{=} X_{w_1}$, also $X_{w_n} \neq X_{w_1}$,
also $w \neq 1$.