3.2 $\mathbb{F}_3$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{F}_2$

1

- Plan: §1 Konstruktion der „geraden Untergruppe" von $\mathbb{F}_2$

  §2 Freie Gruppen und ihre Wirkung auf Bäumen

  §3 Beispiel: Die Wirkung von $\mathbb{F}_2$ auf ihren Cayley-Graph

  §4 Satz über die Untergruppen freier Gruppen (Nielsen-Schreier)

§1

- Ist $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ Basis von $\mathbb{F}_n$, dann kann kein vollständig reduziertes Wort in $\{x_1, x_2, x_1^{-1}, x_2^{-1}\}^*$ gleich der Identität $e \in \mathbb{F}_n$ sein

↳ Untergruppe erz. von $\{x_1, x_2\}$ ist frei vom Rang 2

Proposition

Es ex. eine Untergruppe von $\mathbb{F}_2$ mit endl. Index, die frei vom $\underbrace{\text{Rang 3}}_{\text{(3 Erzeuger + Inverse)}}$ ist.

Beweis:

- Argument nutzt Länge für Worte $g \in \mathbb{F}_2$ aus: $g \in \mathbb{F}_2$ kann eindeutig durch vollst. reduziertes Wort in den Erzeugern dargestellt werden

↳ Länge $|g|$ ist die Anzahl der Terme in dem reduzierten Ausdruck

2

BSP:

$$|x^3x^{-1}y^2xy^{-5}y| = |x^2y^2xy^{-4}| = 9$$
$$= |y^{-1}y^5x^{-1}y^{-2}xx^{-3}| = |g^{-1}|$$
$$\Rightarrow |g| = |g^{-1}| \quad (\dagger)$$

- Sei $H \leq \mathbb{F}_2$ mit $H = \{g \in \mathbb{F}_2 \mid |g| \text{ ist gerade}\}$ die gerade Untergruppe von $\mathbb{F}_2$

↳ Wegen $(\dagger)$ ist H abgeschlossen unter Inversen

- Kürzungen in nicht-vollst. reduzierten Worten geschieht in Paaren

$\Rightarrow$ Wenn $|a|, |b|$ gerade, dann auch $|ab|$ $(\leq |a| + |b|)$ gerade $(\dagger\dagger)$

Korollar

Die gerade Untergruppe $H \leq \mathbb{F}_2$ wird durch $S = \{x^2, xy, xy^{-1}\}$ erzeugt.

Beweis

Erkenne zunächst, dass jedes Wort der Länge 2 sich durch $\{x^2, xy, xy^{-1}, x^{-2}, y^{-1}x^{-1}, yx^{-1}\}^* = S \cup S^{-1}$ erzeugen lässt:

$\{x^2, x^{-2}, y^2, y^{-2}, xy, yx, xy^{-1}, y^{-1}x, x^{-1}y, yx^{-1}, x^{-1}y^{-1}, y^{-1}x^{-1}\}$

Induktion über Wortlänge n:

I.A. $n=2$ ✓

I.S. $n \rightsquigarrow n+2$: Sei $w = x_1y_1 \dots x_ny_n$ ein Wort in der geraden Untergruppe $H \leq \mathbb{F}_2$.

Da $|w|$ gerade ist können wir wegen (††) w in ein Produkt von Worten mit gerader Länge zerlegen:

$$w = \prod_{i=0}^{n} a_i b_i, \quad |a_i|, |b_i| \text{ gerade } (\Leftrightarrow a_i, b_i \in H)$$

Wir führen diese Zerlegung solange durch, bis alle a_i, b_i Worte der Länge 2 sind. Mit I.A. folgt, dass sich alle a_i, b_i durch SUS^{-1} erzeugen lassen.

Da die Hintereinanderreihung von Elementen in SUS^{-1} nur kleine interne Kürzungen zulässt, können diese keine Worte erzeugen, die sich nicht durch Elemente von $S^{-1}US$ darstellen lassen. Folglich lässt sich jedes Wort w mit gerader Länge durch Elemente von SUS^{-1} erzeugen. ☒

- Seien nun $a = x^2$, $b = xy$, $c = xy^{-1}$ und $w = w_1w_2 \cdots w_n$ vollst. reduziertes Wort mit Erzeugern $\{a,b,c,a^{-1},b^{-1},c^{-1}\}^*$

Um zz dass H eine freie Untergruppe mit Basis $\{a,b,c\}$ ist

gilt es zz: $H \ni w \neq e \in \mathbb{F}_2$

- Das „Übersetzen" von w in die Ausgangserzeuger x und y kann zu Kürzungen führen:

BSP $w = a^{-1}b = x^{-1}x^{-1}xy = x^{-1}y$

$$w = c^{-1}ac^{-1}b = (yx^{-1})(xx)(yx^{-1})(xy) = [yx^{-1}xx][yx^{-1}xy]$$
$$= yxy^2$$

↳ Kürzung in $c^{-1}a$ und $b^{-1}a$, aber nicht in ac^{-1}

- Die „Übersetzung" gelingt wie folgt:

  schreibe $w_i = \alpha_i\beta_i$ mit $\alpha_i, \beta_i \in \{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$

  Dann gibt es höchstens ein paar interne Kürzungen, aber keine Kürzungen von ganzen Paaren. Dies motiviert das folgen

Lemma

Sei $w = w_1w_2 \cdots w_n$ ein vollst. reduziertes Wort in dem freien Monoid $\{a,b,c,a^{-1},b^{-1},c^{-1}\}^*$ und seien $\alpha_i\beta_i$ die Ausdrücke für w_i mit Erzeugern $\{x,y,x^{-1},y^{-1}\}$.

Ist $\beta_i = \alpha_{i+1}^{-1}$, so folgt

1. $\alpha_i \neq \beta_{i+1}^{-1}$
2. $\beta_{i+1} \neq \alpha_{i+2}^{-1}$ und
3. $\beta_{i-1} \neq \alpha_i^{-1}$

Beweis

Wir zeigen nur die 1. Aussage anhand $w_i = a^{-1}$. Die Aussagen 1, 2 und 3 folgen mittels den restlichen Elementen des freien Monoids analog.

1. $\alpha_i \neq \beta_{i+1}^{-1}$ für $w_i = a^{-1}$

$$w_i = a^{-1} = x^{-2} \Rightarrow \alpha_i = x^{-1} = \beta_i \xRightarrow{\beta_i = \alpha_{i+1}^{-1}} w_{i+1} = \underset{\substack{\parallel \\ xy}}{b} \vee \underset{\substack{\parallel \\ xy^{-1}}}{c}$$

Dann gilt $\beta_{i+1} = \begin{cases} y, & w_{i+1} = b \\ y^{-1}, & w_{i+1} = c \end{cases}$

Folglich gilt $\alpha_i = x^{-1} \neq y / y^{-1} = \beta_{i+1}^{-1}$

$\blacksquare$

Jetzt können wir zeigen, dass H eine freie Untergruppe von $\mathbb{F}_2$ ist

→ Übersetze zunächst ein vollst. reduziertes Wort

$$w \in \{a, b, c, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}\}^*$$

in ein Wort

$$w = \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \cdots \alpha_n\beta_n \in \{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}^*$$

Mit dem Lemma wissen wir, dass sich höchstens ein Buchstabe α_i oder β_i in jedem Paar w_i kürzt

Dann gilt:

$$(*) \quad |\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \cdots \alpha_n\beta_n| \geq n$$

Also $w \neq e_{\mathbb{F}_2}$.

Warum gilt (*)?

Sei $w = w_1 w_2 w_3$. Dann $|w| = |w_1 w_2 w_3| = 3$

Übersetze und erhalte $w = \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3$

$$|w| = |\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_3\alpha_3\beta_3| = 6$$

Reduziere nun das übersetzte w gemäß Lemma und erhalte

$$w' = \alpha_1 \underbrace{\cancel{\beta_1\alpha_2}}_{\beta_i = \alpha_{i+1}^{-1}} \beta_2\alpha_3\beta_3 \quad \text{für } i = 1$$

$$= \alpha_1\beta_2\alpha_3\beta_3$$

Nun gelten $\alpha_i = \beta_{i+1}^{-1} \Leftrightarrow \alpha_1 \neq \beta_2^{-1}$ und

$$\beta_{i+1} \neq \alpha_{i+2}^{-1} \Leftrightarrow \beta_2 \neq \alpha_3^{-1}$$

Dann gilt

$$|w| = |\alpha_1\beta_2\alpha_3\beta_3| = 4 > 3.$$

§2 3.4 Freie Gruppen und Wirkungen auf Bäumen

- Charakterisiere freie Gruppen durch Wirkung auf Bäumen

↳ Nützlich für Beweise ⇝ Nielsen-Schreier

(Haupt-) Satz 3.20

Eine Gruppe ist frei ⇔ frei wirkt auf Bäumen

- Früher gesehen: G wirkt auf Graph $\Rightarrow \exists$ Fundamentalbereich für diese Wirkung ⇝ Abs. 1.8

- Wiederholung: Konstruktion von Fundamentalbereich

↳ hier: Im Kontext freier Gruppenwirkung auf Bäumen

- Nimm festen Knoten $v \in T$, sodass für $C \subset T$

  - $v \in C$
  - x, y distinkt $\Rightarrow \nexists g \in G: gx = y$

↳ Mind. 1 max. Subbaum mit diesen Eigenschaften

⇝ KERN

- KERN bildet nicht ganz F, weil G frei wirkt

  ↳ Bild von KERN unter G erzeugt alle Knoten, aber nicht alle Kanten

- Für jede Kante $e \notin$ KERN, $e \cap$ KERN $\neq \emptyset$ sei h_e der „geschlossene Teil" von e in KERN verbunden mit KERN

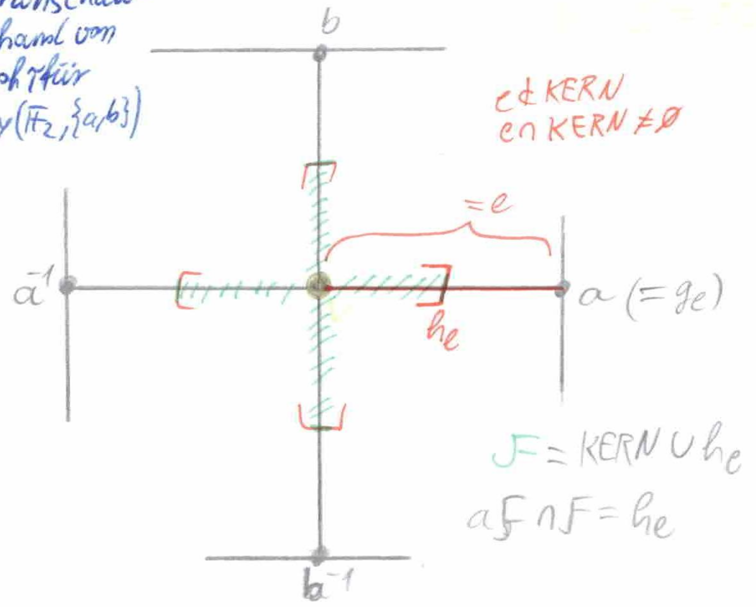
↳ F = KERN $\cup$ alle Halbkanten h_e

- Beweis von Lemma 1.52 zeigt:

Lemma 3.21

$F \subset T$ wie oben beschreibt einen Fundamentalbereich für $G \curvearrowright T$ und F enthält einen Knoten für jede Bahn (der Knoten) unter der Wirkung von G.

Einfache Veranschaulichung anhand von Cayley-Graph für
$F_2 \curvearrowright T = Cay(F_2, \{a, b\})$
$H = \langle \{x, y\} \rangle$



Beweis von Satz 3.20

„⇒" Trivial: G freie Gruppe $\Rightarrow$ wirkt frei auf $Cay(G)$ ✓

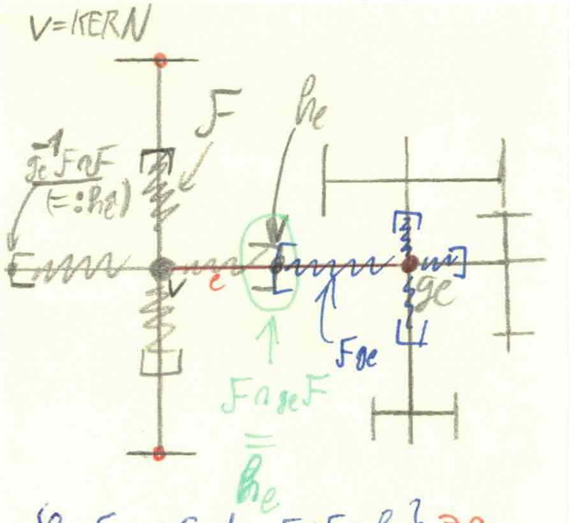
"⇐" Annahme: $G \underset{\text{frei}}{\curvearrowright} \mathcal{T}$, $\mathcal{F}$ Fundamentalbereich wie oben
($\Leftrightarrow gx = x \Leftrightarrow g = e_G$)

• $\forall h_e \in \mathcal{F}$ sei $g_e \in G$ so, dass $\mathcal{F} \cap g_e\mathcal{F}$ Mittelpunkt von e ist

↳ Menge aller dieser g_e mit $\mathcal{S}$ bezeichnen

· Aus $\mathcal{F} \cap g_e\mathcal{F}$ Mittelpunkt folgt:
Auch $g_e^{-1}\mathcal{F} \cap \mathcal{F}$ Mittelpunkt einer (anderen) Kante

$\Rightarrow g_e \in \mathcal{S}$, dann auch $g_e^{-1} \in \mathcal{S}$



$\mathcal{S} = \{g_e \in Cay \mid g_e\mathcal{F} \cap \mathcal{F} = h_e\} \ni g_e$

• Behauptung: Falls $g_e \in \mathcal{S}$, dann ex. eine Halbkante $h_{\bar e} \in \mathcal{F}$ sodass $g_e^{-1} = g_{\bar e}$

↳ Geom. Bedeutung: Für jeden Knoten $g_e \in \mathcal{S}$ ex. ein „gegenüberliegender" Knoten g_e^{-1} und diesen nennen wir $g_{\bar e}$.

• Die Menge $\mathcal{S}$ bildet eine Menge von Erzeugern für G nach Theorem 1.55 (⇝ Möllers Vortrag, erstes Theorem)

> Theorem 1.55: Γ zusammenhängender Graph und G Gruppe, die auf Γ mit Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ operiert. Dann ist die Menge $\mathcal{S} = \{g \in G \mid g \neq e$ und $g\mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\}$ ein Erzeugendensystem für G.

• Jedes Element von $\mathcal{S}$ kann mit seinem Inversen gepaart werden

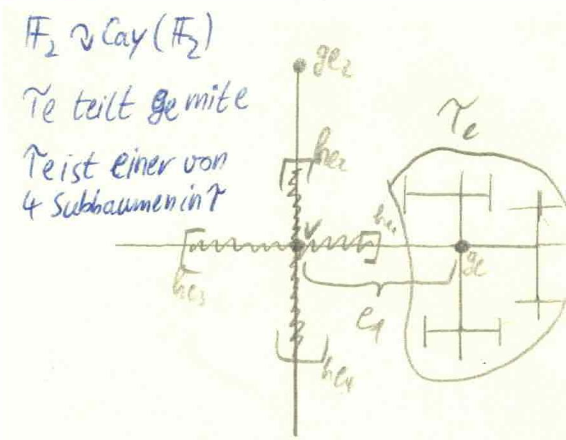
↳ Zerlege $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S} = S \cup S^{-1}$, wobei S für jedes $s \in S$ nicht das Inverse s^{-1} enthält ⇝ Fußnote!

> Fußnote: Wir haben implizit angenommen, dass G keine Elemente der Ordnung 2 enthält, d.h. $\forall g \in G: g \neq g^{-1}$.
> Theorem 3.46 (Alle endl. Gruppen haben die Serresche Eigenschaft FA, [⇝ Vortrag von Kroustauris]) besagt, dass eine endl. Gruppe G, die auf einem Baum $\mathcal{T}$ operiert einen Punkt in diesem Baum fixiert. Enthält G nun ein Element der Ordnung 2, dann kann G nicht frei auf dem Baum operieren ⇝ Beweis von Theorem 3.46.

• Fixiere $v \in$ KERN und für jeden $g_e \in S \cup S^{-1}$ sei $\mathcal{T}_e$ Subbaum von $\mathcal{T}$ induziert durch $v' \in \mathcal{T} \setminus$ KERN, s.d. der reduzierte Pfad von v nach v' durch h_e geht.

↳ Äquivalent: $\mathcal{T}_e$ def. als $\subseteq$-max. Subbaum von $\mathcal{T} \setminus$ KERN, s.d. $\mathcal{T}_e$ einen Knoten mit e teilt ⇝ Figur 3.8

• BSP: $F_2 \curvearrowright Cay(F_2)$
KERN = V
F = 4 Halbkanten $h_{e_1}, \dots, h_{e_4}$
$S = \{g_{e_1}, g_{e_2}\}$, $S^{-1} = \{g_{e_1}^{-1}, g_{e_2}^{-1}\}$
$= \{g_{e_3}, g_{e_4}\}$

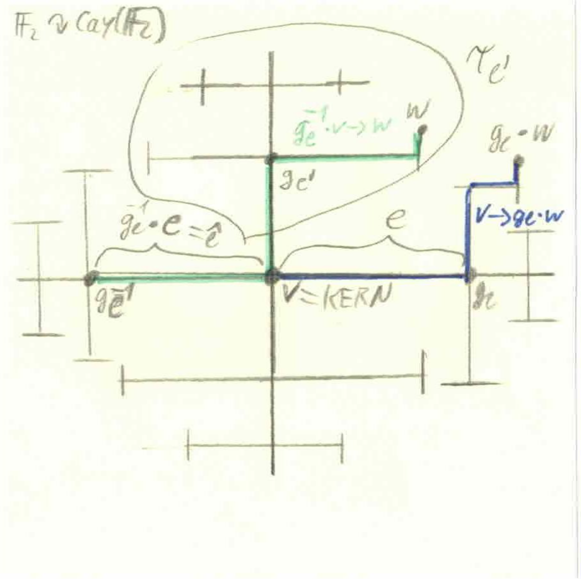


• Verwende das Ping-Pong-Lemma, um zz, dass G eine freie Gruppe mit Basis S ist

↳ <u>Notation</u>: • $\forall g_e \in S$ sei X_s der assoziierte Subbaum T_e

• $p = v \in$ KERN Punkt außerhalb der Vereinigung der Subbäume $\bigcup T_e$

• Vor. 1 des Ping-Pong-Lemmas ($s(p) \in X_s \ \forall s \in S$) folgt direkt aus der Def. von T_e.



• Seien $g_e \in S$; $T_{e'}$ Subbaum mit $g_{e'} \neq g_e^{-1}$; $\hat{e} = g_e^{-1} \cdot e$ Kante zwischen g_e^{-1} und KERN; $w \in T_{e'}$

• Es ex. min. Pfad von $g_e^{-1} \cdot v$ nach w

↳ Wende g_e an und erhalte min. Pfad von v nach $g_e \cdot w$

• Der erste Pfad geht durch $\hat{e}$, also geht das Bild unter g_e durch e

$\Rightarrow g_e \cdot w \in T_e$ und, weil w beliebig gewählt war, folgt

$$g_e(T_{e'}) \subset T_e \Rightarrow \text{Vor. } 2$$ ☒

• Dieser Beweis liefert eine <u>Methode</u>, mit der man eine <u>Basis für G finden</u> kann

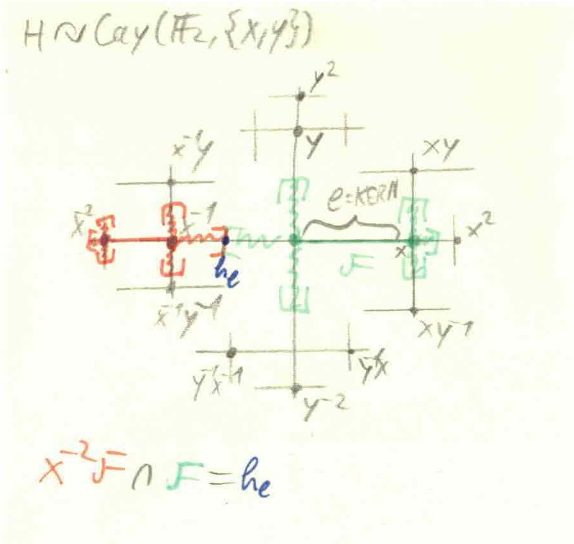
§3

• <u>Bsp.</u>: Betrachte die gerade Untergruppe $H < F_2$ mit $\{x, y\}$ Basis für F_2.

- H operiert auf $\Gamma = Cay(F_2, \{x,y\})$ und wir konstruieren den KERN:

  • Knoten assoziiert mit dem Identitätselement wird zu KERN hinzugefügt

  $1 = v \in$ KERN



  • Wir fügen x-Knoten hinzu als Repräsentation der Elemente mit <u>ungerader Länge</u> und die Kante e, die v mit dem Knoten assoziiert zu x verbindet

- Der Fundamentalbereich F besteht aus KERN + den 6 Halbkanten, die an v und an x angrenzen

- 6 Halbkanten $\Rightarrow$ 3 Basiselemente

- Für die Basis betrachten wir alle $g \in H$ für die $gF \cap F \neq \emptyset$ gilt

↳ $\{x^2, x^{-2}, xy, y^{-1}x^{-1}, xy^{-1}, yx^{-1}\}$

- Inverse eliminieren ergibt unsere zuvor eingesehen Basis

$$\{x^2, xy, xy^{-1}\}$$

für H

§4 Abschluss: Tiefgreifende Erkenntnis über freie Gruppen

Korollar (Satz von Nielsen-Schreier)
Jede Untergruppe einer freien Gruppe ist frei.

Beweis: Sei $H < \mathbb{F}$, $\mathbb{F}$ freie Gruppe
$\mathbb{F}$ operiert frei auf ihrem Cayley-Graph $\Rightarrow$ H operiert frei auf dem Cayley-Graph von $\mathbb{F}$.
$\overset{\text{Satz}}{\Longrightarrow}$ H ist eine freie Gruppe. $\blacksquare$

- Benannt nach Jakob Nielsen (für endl.-erzeugte freie Gruppen, 1921) und Otto Schreier (alle freien Gruppen).