

Def: Die Gruppe $BS(m,n) := \langle a, b \mid ab^m = b^n a \rangle$ für $m, n \in \mathbb{N}$
heißt Baumslag-Solitar Gruppe

In dem Vortrag beschäftigen wir uns größtenteils mit $BS(1,2)$

Satz: $BS(1,2) = \langle a, b \mid ab = b^2 a \rangle \cong \langle \{a, b \mid \begin{matrix} a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x \\ b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x+1 \end{matrix} \} \rangle =: A$

Bew: $ab(x) = 2(x+1) = 2x+2$
 $b^2 a(x) = ((2x)+1)+1 = 2x+2$
 also gilt $ab(x) = b^2 a(x)$.

Das bedeutet, dass wir einen surjektiven Homomorphismus
 $\varphi: BS(1,2) \rightarrow A$ finden können mit $\varphi(a) = a(x)$ und $\varphi(b) = b(x)$
 (Dycksches Lemma)

Noch zu zeigen: φ ist injektiv

Sei $w \in BS(1,2)$ ein Wort aus a, a^{-1}, b, b^{-1} mit $\varphi(w) = 1 = x$

Da b und b^{-1} den Vorfaktor vor dem x nicht ändern kann,
 muss w die gleiche Anzahl an Buchstaben a und a^{-1} haben.
 $\Rightarrow w$ beinhaltet ein Teilwort $(b^e)^a$ oder $(b^e)^{a^{-1}}$ für $e \in \mathbb{Z}$

Wegen der Relation $ab(x) = b^2 a(x) \Leftrightarrow b^{a^{-1}}(x) = b^2(x)$

können wir ein a und a^{-1} aus dem Wort „eliminieren“.

$\Rightarrow$ mehrfaches Wiederholen führt zu $w = b^e$ für ein $e \in \mathbb{Z}$

jedoch gilt $\varphi(w) = \varphi(b^e) = b^e(x) = x + e \stackrel{!}{=} x \Leftrightarrow e = 0 \Rightarrow w = b^0 = 1 \quad \square$

Def: 1) Sei X ein topologischer Raum. Die Gruppenwirkung $G \curvearrowright X$ von einer endlich erzeugten Gruppe nennen wir diskret, wenn jede Bahn eine diskrete Teilmenge von X ist.

Bem: $B \subseteq X$ ist diskret $\Leftrightarrow$ für alle $x \in B$ existiert eine Umgebung $N_x \subseteq X$ sodass gilt: $B \cap N_x = \{x\}$

Def: Eine diskrete Gruppenwirkung einer endlich erzeugten Gruppe nennen wir eigentlich, falls die Stabilisatorgruppe für alle $x \in X$ endlich ist.

Bem: $\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid x \cdot g = x\}$

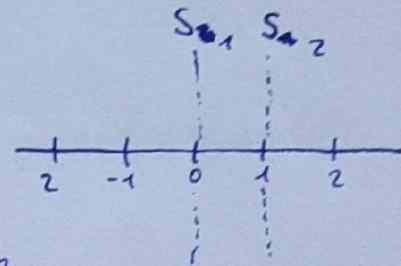
$$D_\infty \cong \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = 1 \rangle$$

Beispiele:

$D_\infty \curvearrowright \mathbb{R}$ (siehe Kapitel 2) (Kurz)

mit $x \cdot s_1 = -x$ und $x \cdot s_2 = -x + 2$ ($x \in \mathbb{R}$)

ist die Gruppenwirkung diskret und eigentlich.



Diskret:

Da $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ein Fundamentalbereich für x ist folgt:

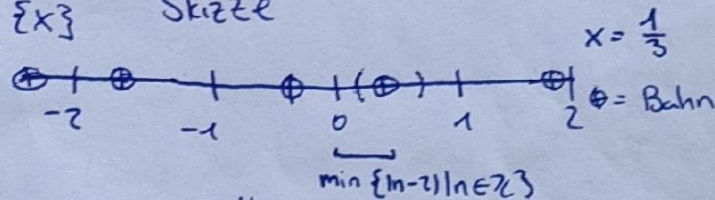
$$\text{Bahn}(x) = \{2n \pm x \mid n \in \mathbb{Z}\} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wenn $x \in \mathbb{Z}$, dann wähle $N_x = (-\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + x) \ni x$

$$\Rightarrow \text{Bahn}(x) \cap N_x = \{x\}$$

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ wählen wir $N_x = (-\varepsilon + x, \frac{1}{2} + x)$ für $\varepsilon = \min\{|n-x|/2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$$\Rightarrow \text{Bahn}(x) \cap N_x = \{x\} \quad \text{Skizze}$$



Eigentlich:

Da alle Spiegelachsen an $\mathbb{Z}$ liegen gilt:

$$\text{Stab}(x) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{falls } x \in \mathbb{Z} \\ e & \text{sonst} \end{cases}$$

Also sind alle Stabilisatorgruppen endlich

• $BS(1,2) \curvearrowright \mathbb{R}$

mit $x \cdot a = 2x$ und $x \cdot b = x + 1$ ist die Gruppenwirkung weder diskret noch eigentlich.

Nicht Diskret:

Es gilt $\{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \text{Bahn}(0)$, denn $a^n b(0) = \frac{1}{2^n}$

Wegen $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) liegen für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele Punkte zwischen $-\varepsilon$ und ε

Nicht eigentlich:

Es gilt $\langle a \rangle \subseteq \text{Stab}(0)$, denn $a^2(0) = 2^2(0) = 0$ und wegen

$\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$ ist die Stabilisatorgruppe nicht endlich

$\Rightarrow$ Die Gruppeneinwirkung $\text{BS}(1,2) \curvearrowright \mathbb{R}$ ist nicht eigentlich.

Def: $\mathbb{Z}[1/2] = \{ \frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N} \}$ nennen wir die dyadische Brüche

Wegen $a^n b^m(0) = \frac{1}{2^n}(0+m) = \frac{m}{2^n}$ folgt $\mathbb{Z}[1/2] \subseteq \text{Bahn}(0)$

und weil für a, a^{-1}, b, b^{-1} gilt:

$$a\left(\frac{m}{2^n}\right) = \frac{m}{2^{n-1}}, \quad a^{-1}\left(\frac{m}{2^n}\right) = \frac{m}{2^{n+1}}, \quad b\left(\frac{m}{2^n}\right) = \frac{m}{2^n} + 1 = \frac{m+2^n}{2^n}, \quad b^{-1}\left(\frac{m}{2^n}\right) = \frac{m}{2^n} - 1 = \frac{m-2^n}{2^n}$$

Wenden alle ~~alle~~ Elemente von $\mathbb{Z}[1/2]$ wieder nach $\mathbb{Z}[1/2]$ geschickt.

Das bedeutet, dass für alle $x \in \mathbb{Z}[1/2]$ gilt: $\mathbb{Z}[1/2] = \text{Bahn}(x)$

Satz 4.1

Die Elemente von $\text{BS}(1,2)$ ~~linear~~ sind ^{affin} lineare Funktionen

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2^n \cdot x + \frac{m}{2^k} \quad (n, m, k \in \mathbb{Z})$$

Bew:

Da $\text{BS}(1,2) = \langle a, b \rangle$ können wir $w \in \text{BS}(1,2)$ als Wort aus a, a^{-1}, b, b^{-1} schreiben. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ die Länge des Wortes w und wir wollen zeigen:

$$w(x) = \alpha x + \beta \quad \text{mit } \alpha = 2^n \text{ und } \beta \in \mathbb{Z}[1/2]$$

$$\text{IA: } \left. \begin{array}{l} a(x) = 2x \quad a^{-1}(x) = \frac{1}{2}x \\ b(x) = x+1 \quad b^{-1}(x) = x-1 \end{array} \right\}_{\substack{(n \in \mathbb{N}) \\ k=1}} \text{ klar}$$

IS: Sei $w = c\bar{w}$ mit $c \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ und $\bar{w} = \alpha x + \beta$ (IV)

$$\underline{c=a}: a(\alpha x + \beta) = 2\alpha x + 2\beta = \underbrace{2^{n+1}}_{n+1 \in \mathbb{Z}} x + \underbrace{2\beta}_{\in \mathbb{Z}[1/2]}$$

$$\underline{c=a^{-1}}: a^{-1}(\alpha x + \beta) = \underbrace{2^{n-1}}_{n-1 \in \mathbb{Z}} x + \underbrace{\frac{\beta}{2}}_{\in \mathbb{Z}[1/2]}$$

$$\underline{c=b}: b(\alpha x + \beta) = \underbrace{\alpha}_{=2^n}_{\in \mathbb{Z}[1/2]} x + \underbrace{\beta+1}_{\in \mathbb{Z}[1/2]}$$

$$\underline{c=b^{-1}}: b^{-1}(\alpha x + \beta) = \underbrace{\alpha}_{=2^n}_{\in \mathbb{Z}[1/2]} x + \underbrace{\beta-1}_{\in \mathbb{Z}[1/2]}$$

③

Also haben wir gezeigt:

$$BS(1,2) \subseteq \{g(x) = 2^n x + \frac{m}{2^k} \mid n, m, k \in \mathbb{Z}\}$$

" $\supseteq$ " Sei ein $g(x) = 2^n x + \frac{m}{2^k}$ gegeben $\Rightarrow g(x) = (a^{-k} b^m a^k) a^n$, denn:

$$a^n = 2^n x$$

und

$$a^{-k} b^m a^k(x) = \frac{1}{2^k} (2^k \cdot (x) + m) = 1 \cdot x + \frac{m}{2^k} = x + \frac{m}{2^k}$$

$$\Rightarrow (a^{-k} b^m a^k) a^n = 2^n x + \frac{m}{2^k} = g(x) \quad \square$$

Korollar 4.2

Die Bahn von $[0,1]$ unter dem Gruppenwirkung $BS(1,2) \curvearrowright \mathbb{R}$ ist $\{[x, x+2^i] \mid x \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}], i \in \mathbb{Z}\} =: I$

Bew Sei $[x, x+2^i] \in I$ und sei $g \in BS(1,2)$.

Wegen Satz 4.1 dürfen wir $g(x) = 2^n x + \frac{m}{2^k}$ schreiben.

$$\Rightarrow g([x, x+2^i]) = [2^n x + \frac{m}{2^k}, 2^n \cdot x + \frac{m}{2^k} + 2^{n+i}]$$

Die untere Grenze liegt in $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, da $x, 2^n, \frac{m}{2^k} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$

und die Länge des Intervalls beträgt 2^{n+i} , also $g([x, x+2^i]) \in I$

Anders gesagt: Das Bild von einem Element aus I ist wieder in I

Außerdem gilt:

$$\{g([0,1]) \mid g(x) = 2^i x + \frac{m}{2^k} \mid i, m, k \in \mathbb{Z}\} = \{[\frac{m}{2^k}, \frac{m}{2^k} + 2^i] \mid i, m, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$x = \frac{m}{2^k} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$$

$$= \{[x, x+2^i] \mid x \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}], i \in \mathbb{Z}\} = I$$

somit folgt die Transitivität von $BS(1,2)$ auf I

Notizen:
- $g \in BS(1,2)$ $[y, y+2^i] \in I$ Da $g(x) = 2^n x + \frac{m}{2^k}$ (4.1) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow g([y, y+2^i]) = [2^n y + \frac{m}{2^k}, 2^n y + \frac{m}{2^k} + 2^{n+i}] \in I$$

- Es gilt $[0,1] \in I \Rightarrow \text{Bahn}([0,1]) \subseteq I$

- wegen $g([0,1]) = [\frac{m}{2^k}, \frac{m}{2^k} + 2^n] \Rightarrow I \subseteq \text{Bahn}([0,1]) \quad \square$

Bem: $g \sim g([0,1])$ ist eine Bijektion zwischen I und $BS(1,2)$,
denn für $g([0,1]) = [0,1]$ muss gelten:

1) $g(0) = 0$ ~~ist~~ und $g(1) = 1$

oder

2) $g(1) = 0$ und $g(0) = 1$

Wenn 1) gilt so ist $g(x) = x$, da jede affin lineare Funktion durch zwei Punkte eindeutig festgelegt ist.

Wenn 2) gilt so muss $g(x) = -x + 1$ gelten, dann wäre
wegen Satz 4.1: $g \notin BS(1,2)$ (wegen Vorfaktor) $\nexists$

$$\Rightarrow g([0,1]) = [0,1] \Rightarrow g(x) = x = e$$

Sei nun $g, \tilde{g}$ mit $g([0,1]) = \tilde{g}([0,1]) \Rightarrow g^{-1}\tilde{g}([0,1]) = [0,1]$

$$\Rightarrow g^{-1}\tilde{g} = 1 \Leftrightarrow g = \tilde{g}$$

5.4 Cayley Graph von $BS(1,2)$

Satz: Das Wortproblem von $BS(1,2)$ mit a und b als Erzeuger ist lösbar

Bew: Sei $w \in BS(1,2)$, da folgendes gilt:

$$BS(1,2) \cong \langle a, b \mid a(x) = 2x, b(x) = x+1 \rangle$$

lässt sich leicht bestimmen, ob $w(x) = x$ gilt $\square$

Bsp: $w = a^2 b a^{-2} b a^2 b^{-1} a^{-2} b^{-1}$

$$\Rightarrow g: x \xrightarrow{b^1} x-1 \xrightarrow{a^2} \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \xrightarrow{b^{-1}} \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \xrightarrow{a^2} x-5$$

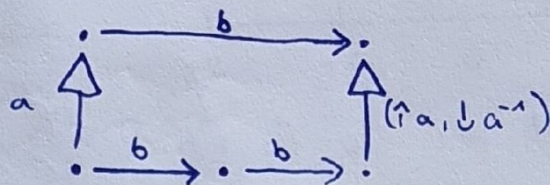
$$\xrightarrow{b} x-4 \xrightarrow{a^{-2}} \frac{1}{4}x-1 \xrightarrow{b} \frac{1}{4}x \xrightarrow{a^2} x \text{ also } w(x) = x$$

Wegen Satz 5.10 ist es möglich den Cayley Graphen von $BS(1,2)$ zu malen

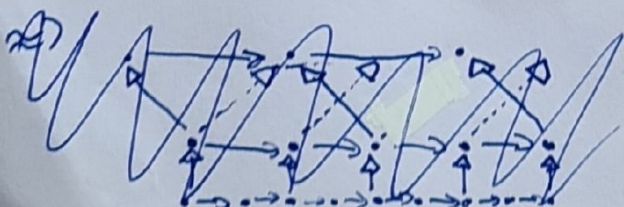
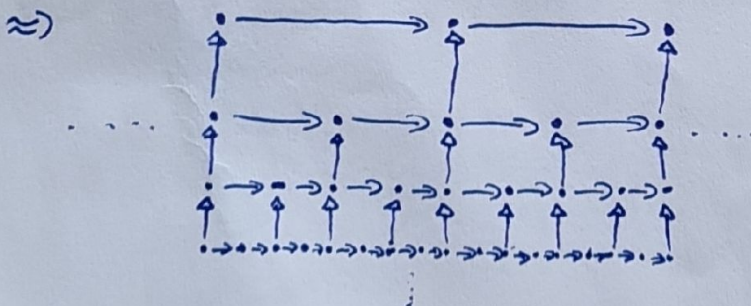
(Bem: Satz 5.10: Sei $S \leq G$ mit $\langle S \rangle = G$: Wortproblem ist lösbar

$\Leftrightarrow$ Der Cayleygraph von Γ_{GS} ist konstruierbar)

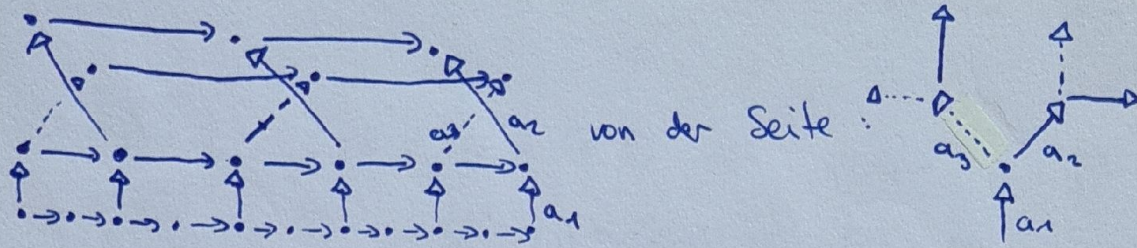
Relation: $ab = b^2a \Leftrightarrow aba^{-1} = b^2$



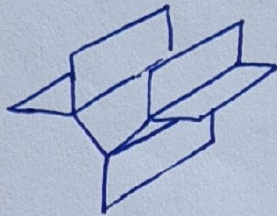
~ obere b-Kante doppelt so lang wie die untere
~ wir haben einen Block



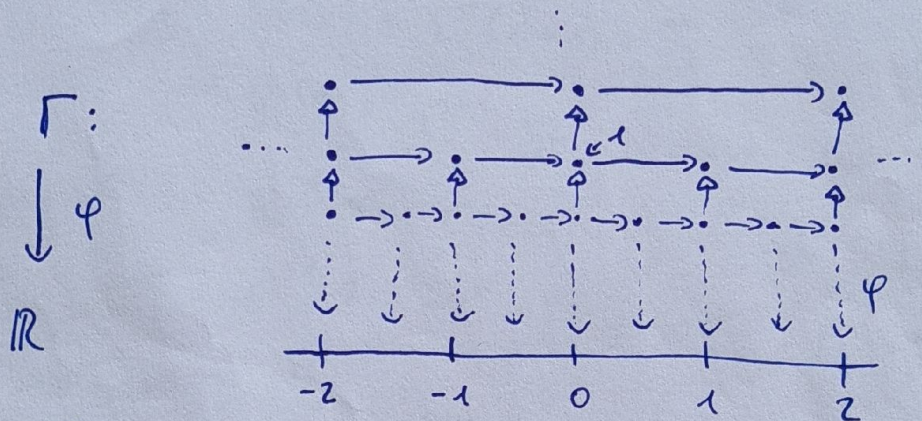
$\approx$)



$\approx$)



Def: Sei $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung, die jeden Punkt des Graphen senkrecht auf $\mathbb{R}$ projiziert mit $\varphi(b^n) = n \in \mathbb{Z}$



Satz: Sei $g \in BS(1,2)$ und e_g die B -Kante in dem Cayley-Graph mit Ursprung g , dann gilt $\varphi(e_g) = g([0,1])$

Bew: Aus dem Cayley-Graphen erkennt man leicht:

$$\varphi(e_g) = [x, y]$$

$$\Rightarrow \varphi(e_g a) = [x, y + (y - x)] = [x, 2y - x]$$

$$\varphi(e_g a^{-1}) = [x, y - (y - x)] = [x, \frac{y+x}{2}]$$

$$\varphi(e_g b) = [y, y + (y - x)] = [y, 2y - x]$$

$$\varphi(e_g b^{-1}) = [x - (y - x), x] = [2x - y, x]$$

Wir machen ein Induktionsbeweis über die Länge des Wortes:

IA $k=0$: $\varphi(e_1) = [0,1] = 1([0,1])$

IS $k \rightarrow k+1$: Sei $g \in BS(1,2)$ mit $g(x) = 2^n x + \frac{m}{2^k}$ $n, m, k \in \mathbb{Z}$
mit $g([0,1]) = [v,w] \Rightarrow g(0) = \frac{m}{2^k} = v, g(1) = 2^n + \frac{m}{2^k} = w$

* a: $g^a(x) = 2^{n+1}x + \frac{m}{2^k} \Rightarrow g^a(0) = \frac{m}{2^k} = v$

und $g^a(1) = 2^{n+1} + \frac{m}{2^k} = 2(2^n + \frac{m}{2^k}) - \frac{m}{2^k} = 2w - v$

a^{-1} : $g^{a^{-1}}(x) = 2^{n-1}x + \frac{m}{2^k} \Rightarrow g^{a^{-1}}(0) = \frac{m}{2^k} = v$

und $g^{a^{-1}}(1) = 2^{n-1} + \frac{m}{2^k} = \frac{(2^n + \frac{m}{2^k}) + \frac{m}{2^k}}{2} = \frac{v+w}{2}$

b: $g^b(x) = 2^n(x+1) + \frac{m}{2^k} \Rightarrow g^b(0) = g(1) = w$

und $g^b(1) = 2^{n+1} + \frac{m}{2^k} = 2w - v$ (wie bei a)

b^{-1} : $g^{b^{-1}}(x) = 2^n(x-1) + \frac{m}{2^k} \Rightarrow g^{b^{-1}}(1) = g(0) = v$

und $g^{b^{-1}}(0) = -2^n + \frac{m}{2^k} = 2 \cdot \frac{m}{2^k} - (2^n + \frac{m}{2^k}) = 2v - w$

Wir wissen schon aus der IV: $g([0,1]) = (e_g)\varphi$

und aus den Rechnungen davor gilt somit:

$$g^c([0,1]) = (e_{g^c})\varphi \quad \text{für } c \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$$

Schlussfolgerung:

Wegen $\varphi(e_g) = g([0,1])$ gilt $\varphi(g) = g(0)$

$$\Rightarrow \varphi(BS(1,2)) = \text{Bahn}(0) = \mathbb{Z}[1/2]$$