

Seminars

Bsp für unendliche Torsionsgruppen (die leicht zu bauen sind)

1) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \dots$

2) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{q + \mathbb{Z} \mid q \in \mathbb{Q}\}$

- Jedes Element ist eine endliche Folge wie z.B. $(1, 0, 1, 0, \dots)$

- Jede Komponente ist aus $\mathbb{Z}_2$, Also mit endlicher Ordnung 2

- Es gibt unendlich viele solcher Folgen

$0 + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ neutr. El.

$\frac{1}{2} + \mathbb{Z} : \dots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

$\frac{1}{3} + \mathbb{Z} : \dots, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots$

$\forall q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ gilt $b(q + \mathbb{Z}) = b(\frac{a}{b} + \mathbb{Z}) = a + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} = 0$

Das Element $q + \mathbb{Z}$ hat Ordnung b , da $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ eine additive Gruppe ist

Das Ziel ist es nun eine endlich erzeugt, aber dennoch unendliche Torsionsgruppe zu konstruieren

Dafür brauchen wir eine Struktur, die

1. endlich lokal ($\Rightarrow$ nur endliche Erzeuger)

2. unendlich global ($\Rightarrow$ tiefe und rekursive Vorgänge erlaubt)

Ein verwurzelter ternärer Baum bietet beides.

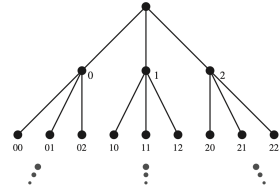


Fig. 6.1. The rooted, infinite ternary tree T .

Hier ist ein Link zur Visualisierung des Baumes und der Symmetrien:

Link zur Visualisierung

Definition 6.1 L -in verwurzelter Baum beinhaltet einen Baum und einen ausgewählten Knoten v , welcher Wurzel genannt wird. (verwurzelte Bäume werden typischerweise mit der Wurzel an oberster Stelle und den restlichen Knoten und Kanten nach unten verlaufend gezeichnet.

Mit dieser Konvention macht es Sinn die Nachfolgenden Knoten einer ausgewählten Knotens v als Kinder.

Bzw. die danach folgenden K Knoten als Enkel. Die adjazenten bzw. benachbarten Knoten können als Geschwisterkinder bezeichnet werden. Ebenso wird ein Knoten w Nachkomme von v genannt, wenn der einzigartige Pfad von w zur Wurzel über v verläuft. Der einzig gemeinsame Knoten zwischen dem Weg $w \rightarrow v$ und dem Weg $v \rightarrow$ Wurzel ist genau v . Bzw. w liegt in der Teilbaumstruktur des Baumes, die unterhalb von v hängt.

Ein verwurzelter Baum, bei dem jeder Knoten, der kein Blatt ist, genau n Kinder hat wird n -ärer Baum genannt.

Man beschrifte die Knoten mit endlichen Sequenzen $n_1 n_2 \dots n_k$, wo $n_i \in \mathbb{Z}_3$
Wurzel entspricht der leeren Sequenz

- Also Knoten $v_{n_1 \dots n_{k+1}}$ ist Kind von $v_{n_1 \dots n_k}$ und $v_{n_1 \dots n_{k+1}}$ Nachkomme der beiden
- Da es versch. Ebenen im Baum T gibt, werden die Knoten auf Ebene k diejenigen mit Label der Länge k
- Die Gruppe $\text{Aut}(T)$ für einen verwurzelten s -Baum beinhaltet alle Symmetrien von T
- Also die Gruppe aller Automorphismen (d.h. aller bijektiven Kanten- und wurzelerhaltenden Abb.)
- Es ist klar, dass jede bel. Symmetrie von T die Ebenen beibehalten muss

• Symmetrie σ erklären $\sigma(v_{n_1 \dots n_k}) = v_{n_{\sigma(1)} \dots n_{\sigma(k)}}$ Shuffle vorstellen

• Teilbäume erklären (Jeder Knoten kann als Wurzel eines Teilbaums fungieren) $v_{n_1 n_2 \dots n_k} \rightarrow T_{n_1 n_2 \dots n_k}$

• Dann lässt sich σ auf den Teilbaum $T_{n_1 n_2 \dots n_k}$ anwenden und wird mit $\sigma_{n_1 n_2 \dots n_k}$ bezeichnet

$\hookrightarrow$ Dieser Shuffle fixiert, dessen Index nicht mit $n_1 n_2 \dots n_k$ beginnt

Also folgendermaßen $v_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}} \mapsto v_{n_1 n_2 \dots n_k (n_{k+1} + 1) n_{k+2} \dots n_k}$

Nun lassen sich noch kompliziertere Automorphismen als unendliches Produkt von Shuffles schreiben

• Eine wichtige ist Der Wasserfall $w = \sigma_0 \sigma_4^{-1} \sigma_{20} \sigma_{24}^{-1} \sigma_{220} \sigma_{224}^{-1}$

1. Teilbäume unter v_0 shufflen
2. Teilbäume unter v_1 invers shufflen
3. Teilbäume unter v_2 shufflen
- : usw

• Genau wie Wasser das über Stufen von Links nach Rechts abwärts fällt, daher auch kaskadierende Symmetrie genannt

- Wir erkennen auch das durch w nur v_2 und deren Kinder fixiert werden
- Genauso wie bei σ lässt sich w nicht nur an der Wurzel ansetzen, sondern an bel. Knoten

↳ $w_{n_1 \dots n_k}$ ist der Wasserfall beim Knoten $v_{n_1 \dots n_k}$

↳ $w_{n_1 \dots n_k}$ kann als unendl. Produkt von Shuffles geschrieben werden, in dem man zu jedem Shuffle den Präfix $n_1 \dots n_k$ zu allen Indizes beifügt

Bspl:

$$w_{21} = \sigma_{21} \sigma_{211}^{-1} \sigma_{2120} \sigma_{2121}^{-1} \sigma_{21220} \sigma_{21221}^{-1} \dots$$

Betrachte den Wasserfall unterhalb Knoten v_{21}

Satz 6.2:

Sei U eine UG von $\text{Aut}(T)$, erzeugt durch σ und w . Dann ist U eine endlich Gruppe, in der jedes $g \in G$ endliche Ordnung besitzt. Darüber hinaus ist die Ordnung jedes Elementes eine Potenz von 3.

- Wir beweisen den Satz vollständig mithilfe von ein paar Rechenregeln und Lemmata

Def 6.3

Es existieren UGs von $\text{Aut}(T)$, welche isomorph zu U .

Für jeden Knoten-label $n_1 n_2 \dots n_k$ in T wird $U_{n_1 n_2 \dots n_k}$ als die UG von $\text{Aut}(T)$, die erzeugt wird

- $\sigma_{n_1 \dots n_k}$ (den lokalen Swaps an diesem Knoten)

- und $w_{n_1 \dots n_k}$ (der dazugehörigen Wasserfall Symmetrie)

$$\sigma_i = \sigma_0 \sigma_i \sigma_0^{-1}$$

- Also innerhalb dieses Teilbaums verhält sich $U_{n_1 \dots n_k}$ auf $T_{n_1 \dots n_k}$ exakt so wie die ursprüngliche Gruppe U auf Gesamt T

Beweis: $V_0 \cong U$

Der volle 3-Baum T und sein Teilbaum unter V_0 , den wir T_0 nennen sind als verwurkelte Bäume kanonisch isomorph:

$$\gamma: T \rightarrow T_0 \quad w \mapsto ow \quad (w \text{ ist ein Wort in } \{0,1,2\}^*) \quad \text{Schiebt das Wort bzw. den Knoten nur nach unten}$$

Unter γ entspricht der leere Pfad (Wurzel) von T dem Knoten V_0 in T_0 , ein Kind iw in T landet auf dem Knoten ow in T_0

Die Konjugation durch γ induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$\Phi: \text{Aut}(T) \rightarrow \text{Aut}(T_0) \quad f \mapsto \gamma \circ f \circ \gamma^{-1}$$

Da $U \leq \text{Aut}(T)$ und $U_0 \leq \text{Aut}(T_0)$ genau die jeweiligen von $\{0,1,2\}$ bzw. $\{0,1\}$ erzeugten UG-
schränkt sich Φ zu folgendem ein: $\Phi: U \rightarrow U_0$

Generatoren Abbildung

Unmittelbar prüft man $\Phi(\sigma) = \gamma \sigma \gamma^{-1} = \sigma_0 \quad \Phi(\omega) = \gamma \omega \gamma^{-1} = \omega_0$
Kinder von V_0 sind V_{00}, V_{01}, V_{02} selbe Spiel
 $\gamma(\sigma(\gamma^{-1}(V_{0i}))) = \gamma(\sigma(V_i)) = \gamma(V_{i+1\%3}) = V_{0,i+1\%3}$
 Also genau σ unter V_0

Da σ, ω U erzeugen und σ_0, ω_0 U_0 erzeugen und Erzeugendensystem abgebildet worden ist Φ surjektiv auf U_0

Φ ist injektiv, da γ bijektiv ist & Konjugation stets injektiv ist, da es ein innerer Automorphismus ist.
 Also ist Φ ein Gruppenisomorphismus und es gilt $U_0 \cong U$.

Regel

$$\omega^2 \sigma_i^{-1} \omega^2 = \omega_{i+2}^{-1}$$

Bsp: $\sigma_{20} = \omega^2 \sigma_0 \omega^2$

Lokale Konjugationsregel

General Conjugation

$$\sigma \sigma_{n_1 \dots n_k} \omega^{-1} = \sigma_{(n_1+1)\%3, n_2 \dots n_k}$$

Es ergeben sich folgende Gleichungen

$$(1) \quad \sigma_0 \sigma_1^{-1} \sigma_{20} \sigma_{21}^{-1} \sigma_{220} \sigma_{221}^{-1} \dots = \omega = (\sigma_0 \sigma_1^{-1}) (\sigma_{20} \sigma_{21}^{-1} \sigma_{220} \sigma_{221}^{-1} \dots) = \sigma_0 \sigma_1^{-1} \omega_2$$

$$(2) \quad \sigma \omega \sigma^{-1} = (\sigma \sigma_0 \sigma^{-1}) (\sigma \sigma_1^{-1} \sigma^{-1}) (\sigma \sigma_{20} \sigma^{-1}) (\sigma \sigma_{21}^{-1} \sigma^{-1}) \dots = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_0 \sigma_{02}^{-1} \sigma_{001} = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \omega_0 \quad (*)$$

$$(3) \quad \omega^2 \omega \sigma^{-2} = \omega^2 (\sigma_0 \sigma_1^{-1} \omega_2) \omega^2 = (\omega^2 \sigma_0 \omega^2) (\omega^2 \sigma_1^{-1} \omega^2) (\omega^2 \omega_2 \omega^2) = \sigma_2^{-1} \sigma_0^{-1} \omega_1$$

$$\omega^2 \omega_2 \sigma^{-2} = \omega^2 \sigma_{20} \omega_{21}^{-1} \sigma_{220} \sigma_{221}^{-1} \dots \sigma^{-2} = \sigma_{20} \sigma_{21}^{-1} \sigma_{220} \sigma_{221}^{-1} \dots = \sigma_{10} \sigma_{11}^{-1} \sigma_{120} \sigma_{121}^{-1} \dots = \omega_1$$

(*) - σ_1 und σ_2^{-1} wirken nur in den Teilsäumen 1 & 2 der ersten Ebene
 - während alle Faktoren von ω_0 in Teilbaum unter Ast 0 operieren
 $\Rightarrow$ Disjunkter Wirkungsbereiche $\Rightarrow$ Elemente kommutieren

$$\textcircled{I} \sigma(\sigma^2 \omega \sigma^{-2}) = \sigma^3 \omega \sigma^{-2} = (\sigma^3 \omega \sigma^{-3}) \sigma = \omega \sigma =: \sigma x_1$$

$$\textcircled{II} (\sigma \omega \sigma^{-1}) \sigma = \sigma \omega \sigma^0 = \sigma \omega$$

$$\textcircled{III} (\sigma^2 \omega \sigma^{-2}) \sigma = \sigma(\sigma \omega \sigma^{-1} \sigma^{-1}) \sigma = \sigma(\sigma \omega \sigma^{-1}) =: x_1 \sigma$$

$$x_2 = \sigma \omega \sigma^{-1}$$

Lemma 6.4

Jedes $g \in \mathcal{U}$ lässt sich als $g := \sigma^k x_1 \dots x_n$ schreiben, wobei $x_i \in \{\omega, \sigma \omega \sigma^{-1}, \sigma^2 \omega \sigma^{-2}\}$

Bew: Da $\mathcal{U}$ die Gruppe, die durch σ und ω generiert wird, kann jedes $g \in \mathcal{U}$ dargestellt werden als Wort in $\{\sigma, \omega, \omega^{-1}\}$. Da weiter gilt

$$\omega^2 = \sigma^{-1} \omega \sigma \text{ und } \omega^{-2} = \omega^{-1} \text{ lässt sich jedes } g \in \mathcal{U} \text{ darstellen als Wort aus } \{\sigma, \omega\}$$

Sei $g = \sigma^{j_1} y_1 y_2 \dots y_n$ mit $y_i \in \{\sigma, \omega\}$ und $y_1 = \omega$. Suche in dem Wort von links nach rechts das erste Auftreten von σ . Angenommen es ist an Stelle k . Also $y_k = \sigma$, d.h. $y_{k-1} = \omega$. Somit haben wir an Stelle $(k-1, k)$ den Wortteil $\omega \sigma$ stehen, welcher nach

$$\textcircled{I} \text{ dasselbe ist wie } \omega \sigma = \sigma(\sigma^2 \omega \sigma^{-2}) =: \sigma x_1 \text{ Also } x_1 := (\sigma^2 \omega \sigma^{-2})$$

Somit kann das σ nach links verschoben werden, in den man die ω 's zu $(\sigma^2 \omega \sigma^{-2})$'s verwendet

$$\text{Also } g = \sigma^{j_1} y_1 \dots y_{k-2} (\omega \sigma) y_{k+1} \dots y_n = \sigma^{j_1} y_1 \dots y_{k-2} \sigma x_1 y_{k+1} \dots y_n = \sigma^{j_1} y_1 \dots y_{k-2} \sigma x_1 y_{k+1} \dots y_n = \sigma^{j_1+1} y_1 \dots y_{k-2} x_1 y_{k+1} \dots y_n$$

$$g = \sigma^{j_1} y_1 \dots y_{k-2} \omega \sigma y_{k+1} \dots y_n = \sigma^{j_1} y_1 \dots y_{k-2} \sigma x_1 y_{k+1} \dots y_n = \sigma^{j_1+1} y_1 \dots y_{k-2} \sigma x_1 y_{k+1} \dots y_n = \dots = \sigma^{j_1+n} x_1^{k-1} y_{k+1} \dots y_n$$

Suche in $y_{k+1} \dots y_n$ das nächst links liegende σ . Angenommen an Position l , dann ist $y_l = \sigma$ und $y_{k+1} \dots y_{l-1} = \omega$

$$\sigma^{j_1+n} x_1^{k-1} y_{k+1} \dots y_n = \sigma^{j_1+n} x_1^{k-1} y_{k+1} \dots y_{l-1} \sigma y_{l+1} \dots y_n = \sigma^{j_1+n} x_1^{k-1} \sigma x_1 y_{l+1} \dots y_n = \sigma^{j_1+n+1} x_1^{k-1} x_1 y_{l+1} \dots y_n$$

$$\text{Nun steht dort } x_1^{k-2} x_1 \sigma = x_1^{k-2} \sigma x_2 = \dots = \sigma x_2^{k-1}$$

$$\text{Also insgesamt } \sigma^{j_1+2} x_2^{k-1} x_1^{l-k-4} y_{l+1} \dots y_n$$

Wieder das gleiche Prinzip anwendet somit lässt sich jedes σ nach vorne verschieben und

die $x_i \in \{x_1, x_2\}$ wobei $x_1 := \omega$ hinzukommt, da wenn z.B. ab Index r bis n kein σ mehr auftritt, bleibt der Rest bestehen. $\square$

Folgender Prozess wird weiterhin verwendet. Um das fest zu halten, definieren wir die Operation Σ auf Wörtern $x_1 \dots x_n \in \{\omega, \sigma \omega \sigma^{-1}, \sigma^2 \omega \sigma^{-2}\}$

$$\Sigma(\omega) = \sigma^2 \omega \sigma^{-2} =: x_1 \quad \Sigma(\sigma \omega \sigma^{-1}) = \Sigma(x_2) = \omega =: x_1 \quad \Sigma(\sigma^2 \omega \sigma^{-2}) = \Sigma(x_1) = \sigma \omega \sigma^{-1} =: x_2$$

$$\text{Dann erweitern wir } \Sigma(x_1 \dots x_n) = \Sigma(x_1) \dots \Sigma(x_n)$$

Wie in obigen Argument ausgenutzt wurde, besagen Gleichungen I, II, III schlicht, dass $x_i \sigma = \sigma \Sigma(x_i) \quad \forall x_i \in \{\omega, \sigma \omega \sigma^{-1}, \sigma^2 \omega \sigma^{-2}\}$

Durch wiederholte Anwendung dieser Tatsache folgt dann, dass

$$x_1 \dots x_n \sigma = \sigma \Sigma(x_1 \dots x_n) \quad \forall x_i \in \{\omega, \sigma \omega \sigma^{-1}, \sigma^2 \omega \sigma^{-2}\}$$

Bsp: Anwenden von Prozess auf das Wort $\omega \omega \omega \omega \omega \omega \omega \omega$

$$\omega \omega \omega \omega \omega \omega \omega \omega \rightarrow \sigma \Sigma(\omega) \Sigma(\omega) \omega \omega \omega \omega \omega \rightarrow \sigma^2 \Sigma^2(\omega) \Sigma^2(\omega) \Sigma(\omega) \omega \omega \omega \omega \rightarrow \sigma^3 \Sigma^3(\omega) \Sigma^3(\omega) \Sigma^2(\omega) \Sigma(\omega) \omega \omega$$

$$\rightarrow \sigma^4 \Sigma^4(\omega) \Sigma^4(\omega) \Sigma^3(\omega) \Sigma^2(\omega) \Sigma(\omega) \Sigma(\omega) \Sigma(\omega) \Sigma(\omega) = \sigma(\sigma^2 \omega \sigma^{-2})^4(\omega) (\sigma \omega \sigma^{-1}) (\sigma^2 \omega \sigma^{-2})^2$$

Kongruenz kommt zustande, da das Element σ und die Operation Σ beide Ordnung 2 haben.

Algorithmus Bew. zu Lemma 6.4 „Slide 8 Left“

1. Reduktion der Inversen:

- ersetze in g alle Vorkommen von σ^{-1} durch σ^2
- ersetze all ω^{-1} durch ω^2

2. Schreibe g als $g = \sigma^{j_1} y_1 y_2 \dots y_n$ mit $y_i \in \{\sigma, \omega\}$ & $y_n = \omega$, da $g \in U$

- Da U die Gruppe, die durch σ und ω generiert wird, ist, kann jedes $g \in U$ dargestellt werden als Wort in $\{\sigma, \sigma^{-1}, \omega, \omega^{-1}\}$.
- wegen der Reduktion lässt sich nun g als Wort aus $\{\sigma, \omega\}^*$

$\{\sigma, \sigma^{-1}, \omega, \omega^{-1}\}^*$ bedeutet alle
eventuellen Verkettungen (Wörter) dieser
Symbole, inklusive der leeren Wortes

(sodass $y_1 = \omega$ - falls σ -Präfix $j \neq 0$ - $y_1 = \sigma$)

3. Initialisiere $k = j \bmod 3$, $h = (y_1, \dots, y_m)$

4. Wiederhole, bis h nur aus $x_i \in \{\omega, \sigma\omega\sigma^{-1}, \sigma^2\omega\sigma^{-2}\}$ besteht:

(a) Finde in h von links die erste σ an Position p .

Dann steht an Position $p-1$ zwingend ein ω .

(b) Ersetze im Teilwort $y_1 \dots y_{p-1} \sigma$ durch

- $\sigma \cdot (\sigma^2 \omega \sigma^{-2})$ Regel I: $\omega \sigma = \sigma (\sigma^2 \omega \sigma^{-2})$

ODER

- $\sigma \cdot (\sigma \omega \sigma^{-1})$ Regel II: $(\sigma^2 \omega \sigma^{-2}) \sigma = \sigma \cdot (\sigma \omega \sigma^{-1})$

ODER

- $\sigma \omega$ Regel II: $(\sigma \omega \sigma^{-1}) \sigma = \sigma \omega$

(c) Erhöhe $k := k+1$ und setze $h := (\text{neues Teilwort}) \cdot \text{Rest}$

5. Am Ende stehen $g = \sigma^k \cdot x_1 \dots x_n$ mit jedem $x_i \in \{\omega, \sigma\omega\sigma^{-1}, \sigma^2\omega\sigma^{-2}\}$

Wähle die so entstehenden n -minimal und setze $\ell(g) = n$ (+1, falls $k \neq 0$)

$\Rightarrow$ Ergebnis g in der gewünschten Normalform

Lemma 6.5

Es ex. ein Homom. $\phi: U \rightarrow \mathbb{Z}_3$ dessen Kern K eine
UG von U ist, welche erzeugt ist durch $\{\omega, \sigma\omega\sigma^{-1}, \sigma^2\omega\sigma^{-2}\}$

Bew:

Ebene k sind alle Knoten, deren Label „Länge“ k hat. Für $k=1$ sind das genau die drei Kinder v_0, v_1, v_2 der Wurzel ω und es wirkt dort als 3-Zykel auf die Knoten. und ω (und auch seine Konjugate) $\omega^i \omega^{-1}$ fixiert alle drei Kinder v_i auf der Ebene 1.

Allgemein bilden ω und ω Knoten auf Ebene k zu Knoten auf Ebene $k+1$ ab. (für bel. $k \geq 0$). Also gilt für die gesamte Gruppe $\mathcal{U}$ dass Knoten auf Ebene k zu Knoten auf Ebene $k+1$ abgebildet werden. Somit gilt für ein fixies k , existiert eine Abbildung von $\mathcal{U}$ nach $\text{Sym}(3)_k$. In diesem Beweis konzentrieren wir uns auf die Wirkung von $\mathcal{U}$ auf die drei Knoten $\{v_0, v_1, v_2\}$.
allgemein ω ist ein unendl. Produkt aus Permutationen, die immer auf Unendlichen unterhalb von Ebene 1 wirken

Die Symmetrie σ induziert die zyklische Permutation (123) (mit den Indizes). Während ω die triviale Permutation induziert. Damit sind die einzigen Permutationen auf dem Bild von ϕ sind $\text{Bild}(\phi) = \{e, (123), (132)\} = \langle (123) \rangle = A_3$. Also $\phi: \mathcal{U} \rightarrow A_3 \cong \mathbb{Z}_3$

Betrachte $g \in \mathcal{U}$ auf $\{v_0, v_1, v_2\}$. Diese Wirkung ist ein 3-Zykel $(v_0 v_1 v_2)^m$ mit $m \in \{0, 1, 2\}$. Setze $\phi(g) = m \bmod 3 \in \mathbb{Z}_3$.
Es ist klar, dass ϕ ein Gruppen-homom. ist, weil Hintereinanderausführung von Permutationen, die entsprechenden Exponenten addiert.
Da schon das Bild von σ allein ganze A_3 ausfüllt, ist ϕ surjektiv

Weil $\omega \in \text{Kern}(\phi) = K$ und K normal in $\mathcal{U}$ ist, ist die Menge $\{\omega, \omega \omega^{-1}, \omega^i \omega^{-i} \} \subset K$
 $K \leq \mathcal{U}$

Also ist $H = \langle \{\omega, \omega \omega^{-1}, \omega^i \omega^{-i} \} \rangle \leq \mathcal{U}$ & $H \leq K$

Es genügt zu zeigen, dass jedes Erzeugendenelement von H unter Konjugation durch die Erzeuger von $\mathcal{U}$ nämlich σ und ω in H bleibt.

Wenn $g \in \mathcal{U}$, dann gilt nach Lemma 6.4 $g = \omega^k x_1 \dots x_r$ mit $x_i \in \{\omega \omega \omega^{-1}, \omega^i \omega^{-i}\}$. Somit jedes $g \in \mathcal{U}$ kann als $y = \omega^k h$ dargestellt werden mit $k \in \{0, 1, 2\}$ und $h \in H$.
 $gH = (\omega^k h)H = \omega^k (hH) = \omega^k H$

Also $\mathcal{U}/H = \{H, \omega H, \omega^2 H\} \cong \mathbb{Z}_3$ zyklische Gruppe von Ordnung 3

Insgesamt $H \leq \mathcal{U}$ und $K = \text{Kern}(\phi) \leq \mathcal{U}$ & $\mathcal{U}/H \cong \mathbb{Z}_3$ und $\mathcal{U}/K \cong \mathbb{Z}_3$

und mit $H \leq K$ folgt: $|\mathcal{U}:H|=3$ $|\mathcal{U}:K|=3 \Rightarrow H=K$

Der ursprünglich als H eingeführte UG ist genau der Kern K , erzeugt durch $\{\omega, \omega \omega^{-1}, \omega^2 \omega^{-2}\}$ □

Die Behauptung, dass $\mathcal{U}$ endlich erzeugt ist, ist offensichtlich.

Die Behauptung, dass $\mathcal{U}$ unendlich ist folgt aus Lemma 6.6, da in einer endlichen Gruppe kein kleinechte Untergruppe auf die Ganze Gruppe surjektiv abbilden.

Lemma 6.6: Der Kern K surjiziert auf $\mathcal{U}$.

Bew: Die UG K ist die Sammlung von Elementen in $\mathcal{U}$ welche v_0, v_1 und v_2 fixieren. Jeder einzelne Erzeuger von K , $\{\omega, \omega \omega^{-1}, \omega^2 \omega^{-2}\}$ kann als Produkt von Elementen der σ_i, σ_i^{-1} und ω_i ($i \in \mathbb{Z}_3$) dargestellt werden wie in (6.1) (2) (3). gek (kann sich als $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1}, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1}, \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1})$ schreiben)

Da die drei Teilbäume $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ sich nicht überschneiden, kann jeder Erzeuger von K als Element von $\mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ betrachtet werden, wobei jedes $\mathcal{U}_i$ wie in Def. 6.3 ist. Es folgt dass $K \leq \mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ ist.

Wir können nun die Projektionsabb. $\pi_i: K \rightarrow \mathcal{U}_i$ z.B. haben wir unter π_0 folgen dies
ist ein Gruppen-homomorphismus

$$\pi_0(K) = \text{Bild}(\pi_0) = \langle \omega_0, \sigma_0 \rangle = \mathcal{U}_0$$

$$\begin{aligned} \omega &\mapsto \sigma_0 \\ \sigma_0 \omega \sigma_0^{-1} &\mapsto \omega_0 \\ \sigma_0^2 \omega \sigma_0^{-2} &\mapsto \sigma_0^{-1} \end{aligned}$$

Damit ist die Projektionsabbildung surjektiv

Da $\mathcal{U}_0 \cong \mathcal{U}$ folgt die Behauptung, dass K auf $\mathcal{U}$ surjiziert.

Unter all diesen Darstellungen ex. wegen der endlichen Erzeugendenzmenge mind. eine mit kleinstem n .

Zu aller Erst definieren wir eine „Länge“ für jedes $g \in U$. In dem man g als solch ein Ausdruck schreiben kann $g = \omega^k x_1 \dots x_n$, wobei $x_1, \dots, x_n \in \{\omega, \omega\omega^{-1}, \omega^2\omega\omega^{-2}\}^*$ und n so klein ist wie möglich. Dann lässt sich folgendes definieren

$$l(g) := \begin{cases} n & k=0 \\ n+1 & k \neq 0 \end{cases}$$

um sicher zu stellen, dass $l(1)=1, l(\omega^2)=1, l(\omega)=1$ gelten und $l=0$ ist nur für das neut. Element übrig bleibt

$$\begin{array}{l} k=0 \\ g = x_1 \dots x_n \\ l(g) = n \end{array}$$

$$\begin{array}{l} k \neq 0 \\ g = \omega^k x_1 \dots x_n \\ l(g) = n+1 \end{array}$$

Was ist den eigentlich die Bedeutung von l ?

1. Jeder Faktor $x_i \in \{\omega, \omega\omega^{-1}, \omega^2\omega\omega^{-2}\}$ führt einen Wasserfall genau unter dem Knoten v_0, v_1, v_2 aus - Also jeweils eine Ebene tiefer im Baum
2. Wenn man diese hintereinander schaltet $g = \omega^k x_1 \dots x_n$, dann wirkt g absolut trivial auf all Ebenen oberhalb der Ebene und nicht-trivial ab dieser Ebene nach unten

Also $l(g) = d$ bedeutet g wirkt trivial auf Ebene $d-1$ und oberhalb

Und erst ab Ebene d , entstehen die nicht-trivialen haschachierenden Shuffles
Also wie weit in die Tiefe des Baumes g seine Wirkung hinein führt.

Lemma 6.7 Jedes $g \in U$ hat eine dreier-Potenz als Ordnung

Bew: Der Beweis geschieht per Induktion auf $\ell(g)$. Der Basisfall, dass $\ell(g)=1$ beinhaltet es zu zeigen, dass die Ordnung dieser Elemente $\sigma, \sigma^2, \sigma\omega\sigma^{-1}, \omega, \sigma\omega\sigma^{-2}$ Ordnung 3 haben.

IV: $\ell(g)=n+1$ gilt und für jedes h mit $\ell(h)<\ell(g)$ gilt bereits $\text{ord}(h)=3^m$

IS: Man muss folglich 3 Fälle betrachten

Fall 1: $g = \sigma x_1 \dots x_n$

Sei n_0 die Anzahl der Vorkommen von ω entlang der x_i ;
Sei n_1 die Anzahl der Vorkommen von $\sigma\omega\sigma^{-1}$ entlang der x_i ;
Sei n_2 die Anzahl der Vorkommen von $\sigma^2\omega\sigma^{-2}$ entlang der x_i ;
Somit $n = n_0 + n_1 + n_2$
der konjugierten Steinfeld

Da wir $g = \sigma x_1 \dots x_n$ angenommen haben folgt

$$g^3 = \sigma x_1 \dots x_n \sigma x_1 \dots x_n \sigma x_1 \dots x_n = \sum^3 (x_1 \dots x_n) \sum (x_1 \dots x_n) (x_1 \dots x_n) \in K$$

Im resultierenden Ausdruck von g^3 kommt ω also n_0 -mal in $(x_1 \dots x_n)$, n_1 -mal in $\sum (x_1 \dots x_n)$ und n_2 -mal in $\sum^2 (x_1 \dots x_n)$ auf.
Also insgesamt $n = n_0 + n_1 + n_2$ -mal. Selbstmapfen tauchen $(\sigma\omega\sigma^{-1})$ -mal und $(\sigma^2\omega\sigma^{-2})$ -mal auf.

Betrachtet man K als eine UG von $U_0 \times U_1 \times U_2$, wie in Lemma 6.6 sehen wir, dass $g^3 = (g_0, g_1, g_2)$, wobei $g_i \in U_i$.

Wendet man die Glsmr ①, ②, ③ an, so sieht man, dass g_i kann als Wort in $\{\omega, \sigma, \sigma^2\}^*$ von der Länge $3n_i$ mit genau n_i Vorkommen jedes ω, σ und σ^2 .

Durch anwenden von Regeln ①, ②, ③ sieht man, dass σ und σ^2 nach links verschoben und gestrichen werden können. Was in einem Wort von Länge n resultiert mit Benutzen des Alphabets $\{\omega, \sigma, \sigma^2, \sigma^2\omega, \sigma^2\omega\sigma^{-1}\}$.

Per Induktion ist die Ordnung der g_i eine Potenz von 3, was bedeutet die Ordnung von g^3 ist eine Potenz von 3 und damit ist Ordnung von g eine Potenz von 3.

1. Wasserte

$$\ell(g_i) = n_i < n+1 = \ell(g)$$

Also g_i eine Potenz von 3

$$2. \text{Ord}(g^3) = \text{KGV}(\text{ord}(g_0), \text{ord}(g_1), \text{ord}(g_2)) = \text{KGV}(3^{m_0}, 3^{m_1}, 3^{m_2}) = 3^M$$

wobei $M = \max(m_0, m_1, m_2)$, da 3 prim

$$3. \text{Da } \text{Ord}(g^3) = 3^M \text{ ist } \Rightarrow (g^3)^{3^M} = 1 = g^{3^{M+1}}$$

Ist $d = \text{ord}(g)$, so ist $d \mid 3^{M+1}$ mit $g^d = 1$

$$\text{Wel } 3^{M+1} = 1 \Rightarrow d \mid 3^{M+1}$$

Jeder Teiler einer Primzahlpotenz ist selbst eine Primzahlpotenz

$$\Rightarrow \text{ord}(g) = d = 3^N \text{ mit } 0 \leq N \leq M+1$$

Fall 2: $g = \sigma^2 x_1 \dots x_n$

Das Vorgehen ist sehr ähnlich zu Fall 1: Step 1: Ausdruck von $g^3 = (\sigma^2 x_1 \dots x_n)^3$

Step 2: Shifting σ left mit ①-③ und ⑦-⑩ bzw. dem Algorithmus

Step 3: Restriktion auf die drei Teilräume

Step 4: IA und IV verwenden

Step 5: $\text{Ord}(g^3)$ auf $\text{Ord}(g)$ zurückführen

Fall 3: $g = x_1 \dots x_n x_{n+1}$

Wir haben wieder $n+1 = n_0 + n_1 + n_2$. Wir können annehmen, dass zwei von n_0, n_1, n_2 nicht Null sind, denn ansonsten wäre g eine Potenz von $\{\omega, \sigma\omega\sigma^{-1}, \sigma^2\omega\sigma^{-2}\}$ und damit wäre $\text{ord}(g)=1$ oder 3. Also können wir annehmen, dass jedes $n_i \leq n$ ist.

Da $x_i \in K \Rightarrow g \in K$ und damit $g = (g_0, g_1, g_2) \in U_0 \times U_1 \times U_2$

Anwenden von ①, ②, ③ liefert dass jedes g_i als Wort der Länge $n+1$ dargestellt werden kann in $\{\omega, \sigma, \sigma^2, \omega\sigma^2\}^*$

Wir wissen sogar genau wie viele Elemente dieses Alphabets auftreten. z.B. ω tritt n_0 -mal in g_0 auf, ω tritt n_1 -mal in g_1 auf, ω tritt n_2 -mal in g_2 auf.

Nun ersetzen wir in jedem g_i σ^2 mit σ^2 durch Shifting σ left an mit der Technik von Lemma 6.4

Also lässt sich jedes g_i darstellen mit $g_i = \sigma_i^{s_i} x_1 \dots x_{m_i}$

wobei $x_1 \dots x_{m_i} \in \{\omega, \sigma, \sigma^2, \sigma^2\omega, \sigma^2\omega\sigma^{-1}\}^*$ und $m_i = n+1$

$$g^3 = \sum^3 (\dots) \sum (\dots) \sum (\dots) = A \cdot B \cdot C$$

$$g_i = g^3|_{T_i} = A|_{T_i} \cdot B|_{T_i} \cdot C|_{T_i}$$

$\bullet$ A wirkt auf T_i genau an den Stellen, an die in Wort x_j der Index $j \equiv i-2 \pmod 3$

$\bullet$ B wirkt auf T_i genau an den Stellen, an die $j \equiv i-1 \pmod 3$

$\bullet$ C wirkt auf T_i genau an den Stellen, an die $j \equiv i \pmod 3$

Länge abschätzen

$$\frac{n_0}{3} + \frac{n_1}{3} + \frac{n_2}{3} = n$$

$$\# \{j: x_j = \omega\} + \# \{j: x_j = \sigma\omega\sigma^{-1}\} + \# \{j: x_j = \sigma^2\omega\sigma^{-2}\}$$

$$\text{So gilt sofort } \ell(g_i) \leq n < n+1 = \ell(g)$$

Gegen diese Kombination aus endlicher lokaler Verzweigung und unendlicher Tiefe macht den verwurzelten ternären Baum zur perfekten Bühne, auf der die Grupp-Sylvi-Gruppe ihre endliche Torsioneigenschaft aufspielen kann.

Die Gupta-Sidderi Gruppe widerlegt die ursprüngliche Vermutung, dass Exponent 3 plus endliche Erzeugung auch Endlichkeit erzeugt.

Sie ergänzt damit das Bild, dass $B(2,3)$ zwar endlich aber $B(3,3)$ und darüber hinaus unendl. sein kann.

Wichtig:

- Exponent allein reicht nicht: Man muss sehr feingliedrig konstruieren, unendlich erzeugt Torsionsgruppe, unendlich zu machen