

Kurze Wdh.

- $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ Alphabet, $L \subseteq S^*$ Sprache,
- M Automat, $M = \{\text{Knoten}, S(\text{Kanten}), SK, EK\}$
↖ Endknoten
↗ Startknoten
- $L(M) := \{w \in S^* \mid s \xrightarrow{w} e\}$

reg. Sprache: L reg. Sprache $\Leftrightarrow L = L(M)$, M -DFA $\left(\begin{array}{l} |SK| = 1 \\ \cdot \text{keine doppelte Kante} \\ \cdot \text{endlich} \end{array} \right)$

7.3 reguläres Wortproblem

$$\cdot G = \langle S \rangle, |S| < \infty$$

$$\Rightarrow WP(G, S) = \{w \in S S S^{-1} \mid \pi(w) = e \in G\} \quad (\text{Dehn'sche Wortproblem})$$

7.20 Theorem:

$WP(G, S)$ reg. Sprache

$$\Leftrightarrow |G| < \infty$$

Bew:

$$\Rightarrow \text{"} |G| < \infty \Rightarrow WP(G, S) \text{ reg. Sprache "}$$

$$G \text{ endlich} \Rightarrow \sqrt{G, S S S^{-1}} \text{ vollst. DFA } (SK = EK = \{id\})$$

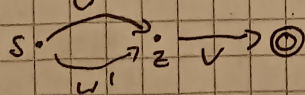
$$\Leftarrow \text{"} WP(G, S) \text{ reg. Sprache} \Rightarrow |G| < \infty \text{"}$$

$$L(M) = WP(G, S)$$

$$\Rightarrow M \text{ DFA}$$

• Erimme M so, dass alle Knoten durch einen gerichteten Knoten mit einem $e \in EK$ verbunden sind

Sei $w, w' \in S S S^{-1}$ so, dass für $s \in SK$ gilt



$$\Rightarrow wv, w'v \in L(M)$$

$$\Rightarrow \pi(wv) = \pi(w'v) = e \in G \quad (e = id)$$

per Def.

$$\Rightarrow \pi(w) = \pi(w')$$

$$\Rightarrow |G| \leq |\{v \in M \mid v \text{ Knoten in } M\}|$$

□

7.4 Normalformen

Wdh./Def

$$G = \langle S \rangle, NF \subseteq \{S \cup S^{-1}\}^*$$

• NF Normalform von G

$$\Leftrightarrow \pi|_{NF} \text{ bijektiv, } \pi: \{S \cup S^{-1}\}^* \rightarrow G \text{ Auswertungsfkt.}$$

• G hat reguläre Normalform (reg. NF)

$$\Leftrightarrow NF \text{ reguläre Sprache}$$

7.22 Bsp

$$\mathbb{F}_2 \cong \{w \in \{x, x^{-1}, y, y^{-1}\}^*\} \text{ hat reg. Normalform.}$$

7.23 Bsp.

$$\text{Betrachte } \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}: x = a^i b^j, i, j \in \mathbb{Z}$$

Offensichtlich: $\{a^i | i \in \mathbb{Z}\}, \{b^j | j \in \mathbb{Z}\}$ reg. Sprachen

$$\stackrel{7.11}{\Rightarrow} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \text{ hat reg. Sprache.}$$

7.24 Prop.

$$\text{Sei } G = \langle S \rangle, H = \langle T \rangle, |S| < \infty, |T| < \infty, N_S \subseteq \{S \cup S^{-1}\}^* \text{ reg. NF}$$

$$\Rightarrow \exists N_T(H) \subseteq \{T \cup T^{-1}\}^* \text{ reg. NF}$$

Bew:

$$\text{Sei } s \in \{S \cup S^{-1}\}^* \text{ oder } s \in S \text{ oder } s \in S^{-1}$$

$$\Rightarrow \exists w_s \in \{T \cup T^{-1}\}^*: w_s = s$$

7.25 Bsp

$$D_{\infty} = \langle a, b \rangle = \langle a, \tau, \tau^{-1} \rangle, a, b \text{ Spiegelungen, } \tau = \text{Translation}$$

7.26 Prop

$$G, H \text{ haben reg. NF}$$

$$\Rightarrow G \oplus H, G * H \text{ haben reg. NF}$$

Bew:

• $G \oplus H$: vergleiche mit 7.23

• $G * H$: Konkatenation von $G \oplus H$ ($(G \oplus H)^*$)

7.27 Kor.

$$G, H \text{ endl.}$$

$$\Rightarrow G * H \text{ hat reg. NF}$$

Bew:

$$G, H \text{ endl.} \Rightarrow G, H \text{ haben reg. NF}$$

$$\stackrel{7.26}{\Rightarrow} G * H \text{ hat reg. NF}$$

7.28 Theorem

G hat reg. NF, ~~aber~~ $|G| = \infty$

$$\Rightarrow \exists g \in G: \text{ord}(g) = \infty$$

Bew:

M kompletter Automat, $L(M)$ reg. NF für G , n Nummer der Kante in M

$$\Rightarrow \exists x \in L(M): |x| > n$$

$$|G| = \infty$$

$$\Rightarrow x = uv^i w, uv^i w \in L(M), \forall i \in \mathbb{N}_0$$

Pumping-Lemma

$$\Rightarrow \pi(uv^i w) \neq \pi(uv^j w), \forall i \neq j$$

$L(M)$ reg. NF

$$\Rightarrow \pi(v)^i \neq \pi(w)^j$$

$$\Rightarrow \text{ord}(\pi(v)) = \infty$$

7.5 endl. erz. UG von freien Gruppen

Was wissen wir nicht?

1)

G endl. erz $\nRightarrow H \leq G: H$ endl. erz.

Bsp:

$$\mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle, \phi: \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \ker(\phi) = \langle S \rangle = \langle \{x^i y^j \mid i, j \in \mathbb{Z}, i+j \neq 0\} \rangle$$

30 Lem

$$\mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle, \phi: \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{Z}, \phi(x) = \phi(y) = 1$$

$$\Rightarrow \ker(\phi) = \langle S \rangle = \langle \{x^i y^{-i} \mid i \in \mathbb{Z}\} \rangle$$

Bew:

Da $\phi(x) = \phi(y) = 1$ ist offensichtlich $\mathbb{F}_2 / \langle S \rangle \cong \mathbb{Z}$

zz: $\langle S \rangle$ normal

$$x x^i y^{-i} x x^{-1} = x^{i+1} y^{-(i+1)} \cdot y x^{-1} = \underbrace{x^{i+1} y^{-(i+1)}}_{\in S} \cdot \underbrace{(y x^{-1})^{-1}}_{\in S} = \dots \quad \square$$

2)

G endl. erz, $A, B \leq G$ endl. erz $\nRightarrow A \cap B$ endl. erz.

7.31 Bsp

$$\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle, \mathbb{Z} = \langle z \rangle, \gamma: \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \gamma(x) = \gamma(y) = 1 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \ker(\gamma) = K = \langle x^{-1} z, y^{-1} z \rangle \quad (\text{Vgl. 2.30})$$

$$\Rightarrow \ker(\gamma) \cap \mathbb{F}_2 = \ker(\phi)$$

7.32 Theorem Housdorff

G endl. erz, freie Gruppe, $H, K \leq G$ endl. erz.

$\Rightarrow H \cap K$ endl. erz, freie Gruppe

7.33 Theorem

$$G = \langle S \rangle, |S| < \infty, H \leq G$$

H endl. erz

$$\Leftrightarrow \exists L = \{S \cup S^{-1}\}^*, L \text{ reg. : } \pi(L) = H$$

Bew:

" $\Rightarrow$ " H endl. erz

$$H \text{ endl. erz} \Rightarrow \exists T: H < T$$

$$\text{Wähle } w \in \{S \cup S^{-1}\}^*: \pi(w) = e, \forall e$$

" $\Leftarrow$ "

$$L = L(M), \pi(L) = H < G$$

Annahmen zu M :

1. deterministisch; keine ϵ - und doppelkanten

2. S einziges SK, keine Kante nach S

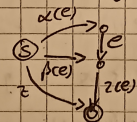
3. E einzig EK, keine Kante von E

$$4. S \setminus \{E\} \text{ Knoten : } \exists \beta_1(k), \beta_2(k): g \xrightarrow{\beta_1(k)} k \xrightarrow{\beta_2(k)} E, \beta_1, \beta_2 \text{ Pfade}$$

$\Rightarrow \exists T \leq M$ gerichteter Spannbau (Spanning Tree) (keine Kreise)

Sei $e \in M \setminus T$.

$\Rightarrow \exists \alpha(e), \beta(e), \gamma(e)$ Pfade in T



Sei $w \in L$

$$\Rightarrow w = g_0 h_1 g_1 \dots h_n g_n, g_i \in T, h_i \notin T$$

$$\Rightarrow g_0 = \alpha(e_1), \alpha(e_{i+1}) = \beta(e_i) g_i \Rightarrow g_i = \beta(e_i)^{-1} \alpha(e_{i+1})$$

$$\pi(w) = \pi[g_0 h_1 g_1 h_2 g_2 \dots g_n]$$

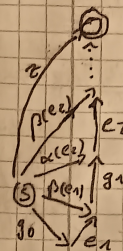
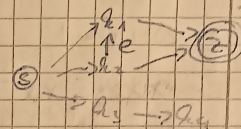
$$= \pi[\alpha(e_1) h_1 \beta(e_1)^{-1} \alpha(e_2) h_2 \beta(e_2)^{-1} \alpha(e_3) \dots z]$$

$$\Rightarrow \pi(L) \subset \langle E \rangle = \langle \{ \pi(e), \pi[\alpha(e) h(e) \beta(e)^{-1}] \mid e \in M \setminus T \} \rangle$$

zz: $E \subset H$

$$1) \pi(e) \in H$$

$$2) \pi[\alpha(e) h(e) \beta(e)^{-1}] = \pi[\underbrace{\alpha(e) h(e)}_{\pi(\dots) \in H} \underbrace{\beta(e)^{-1}}_{\pi(\dots) \in H}]$$



7.34 Kor

F frei, $H < F$, H endl. erz.

$\rightarrow H$ frei

Bew:

• Nielsen-Schreier Theorem 3.23: Jede UG einer freien Gruppe ist frei.

• $H < F_n$ endl. erz.

$$\Rightarrow H = \pi(L)$$

$$\Rightarrow h \in H: h = \pi(w_1) \dots \pi(w_i), w_i \in \{E \cup E^{-1}\}^*, l_{ij} \in L$$

Frei reduziert:

$$\alpha(e_1) l(e_1) \beta(e_1)^{-1} (\alpha(e_2) l(e_2) \beta(e_2)^{-1})^{-1} \\ = \alpha(e_1) l(e_1) \beta(e_1)^{-1} \beta(e_2) l(e_2)^{-1} \alpha(e_2)^{-1}$$

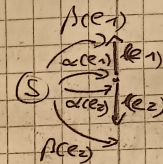
Falls ganz anordnen, dann $\beta(e_1) = \beta(e_2)$, $l(e_1) = l(e_2)$

$$\Rightarrow e_1 = e_2$$

$\rightarrow$ Wort mit n „Buchstabe“ aus $E \cup E^{-1}$ ist äq zu

Wort $\geq n$ aus „Buchstabe“ von F_n -Generatoren

$\Rightarrow E$ freie Basis von L , H frei



7.35 Lem

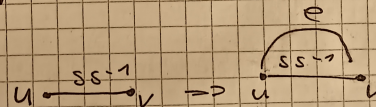
$L \subseteq \{S \cup S^{-1}\}$ reg. Sprache, $R = \{w \in L \mid w \text{ frei reduziert}\}$

L regulär

$\Rightarrow R$ regulär

Bew:

$$L = L(M)$$



$\Rightarrow M'$, (also falls $w S S^{-1} u \in M \Rightarrow w u \in M'$)

$L \cap L(M') \xrightarrow{\text{7.11}} \text{frei red. Wörter}$

Bem. Houson

H, K endl. erz.

7.23

$$\Rightarrow H, K = \pi(L_H), \pi(L_K), (7.35: L_H, L_K \text{ frei red.})$$

$\Rightarrow L_H \cap L_K$ reg. $\cap$ frei red.

7.11

$$\Rightarrow L_H \cap L_K \cong H \cap K$$