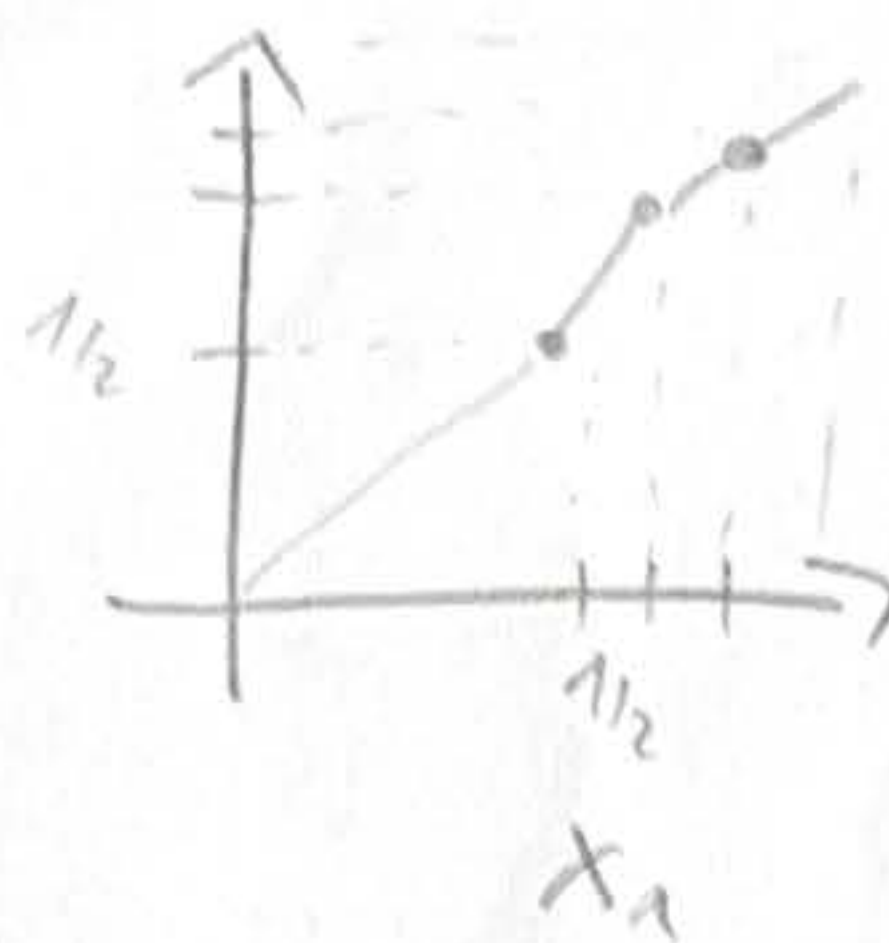
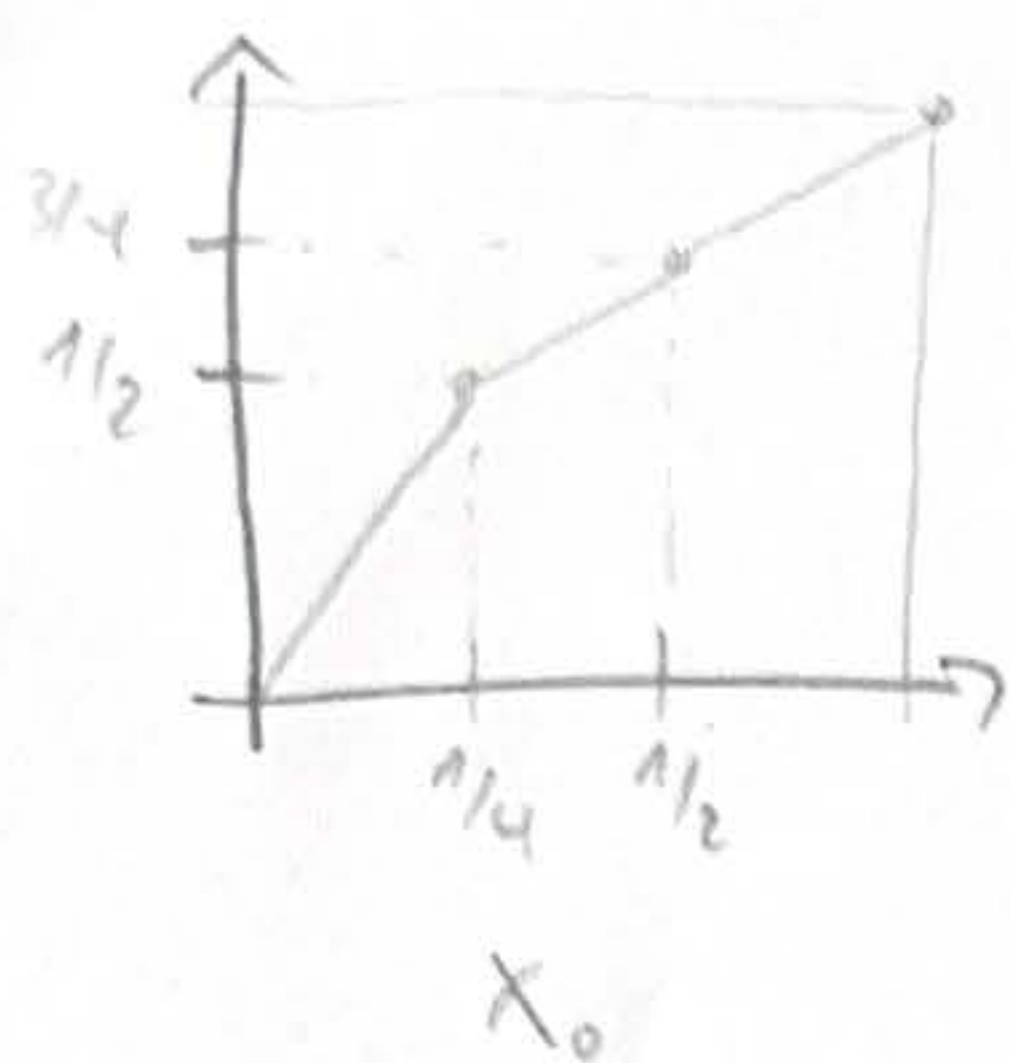
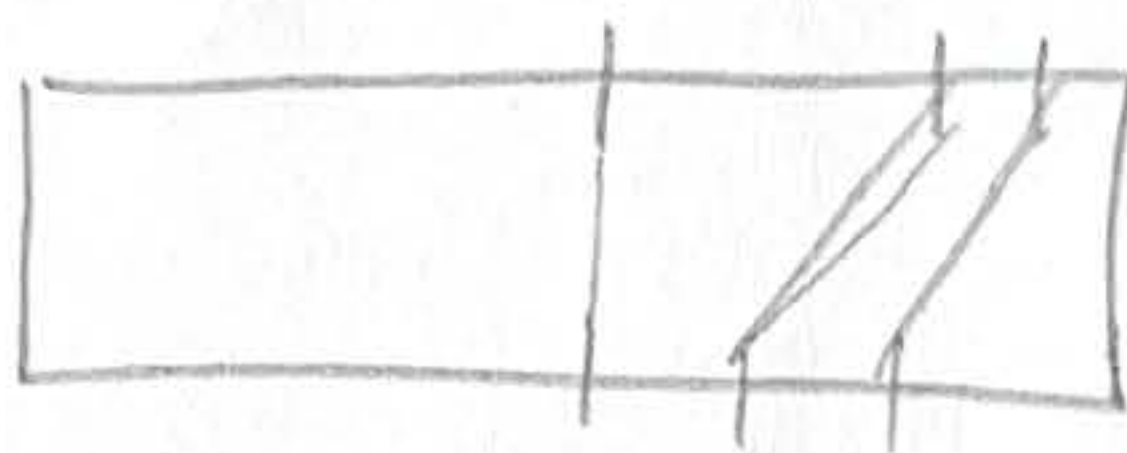


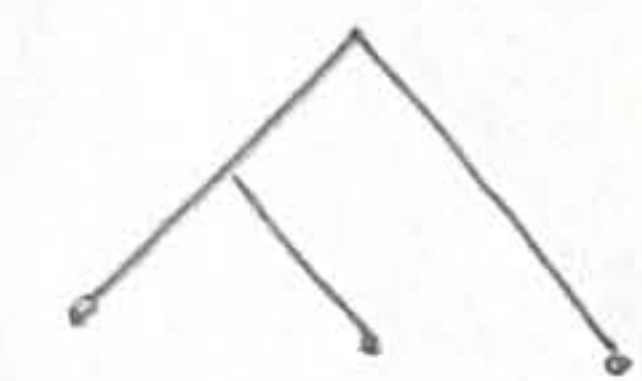
GALERIE



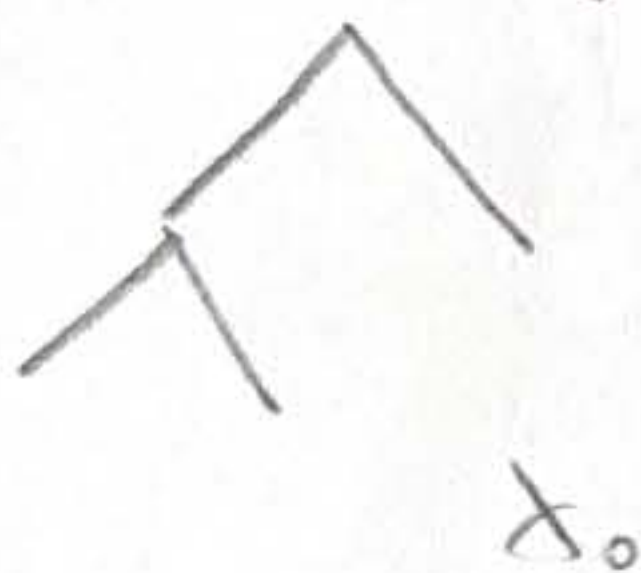
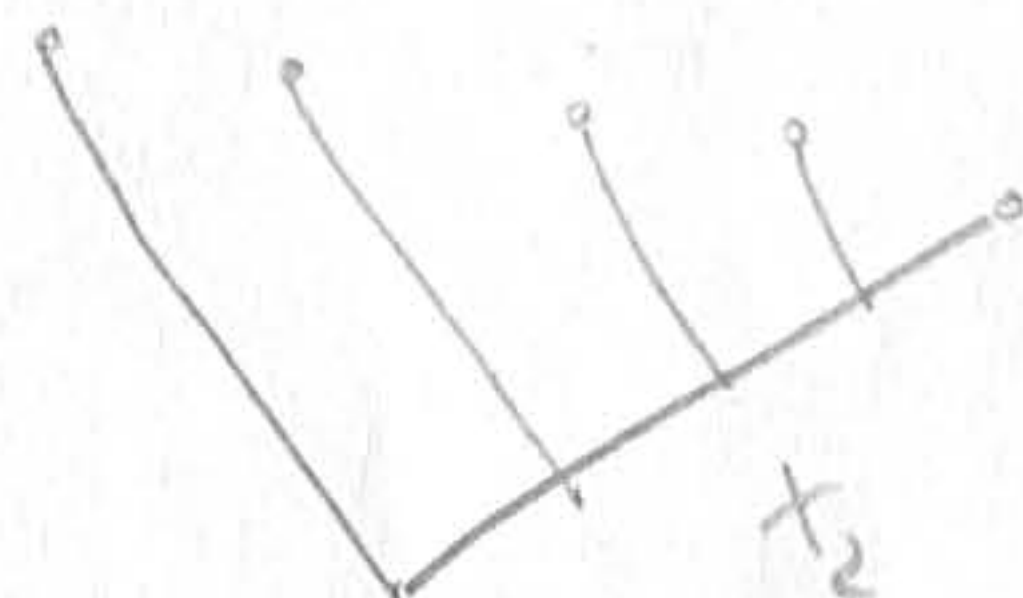
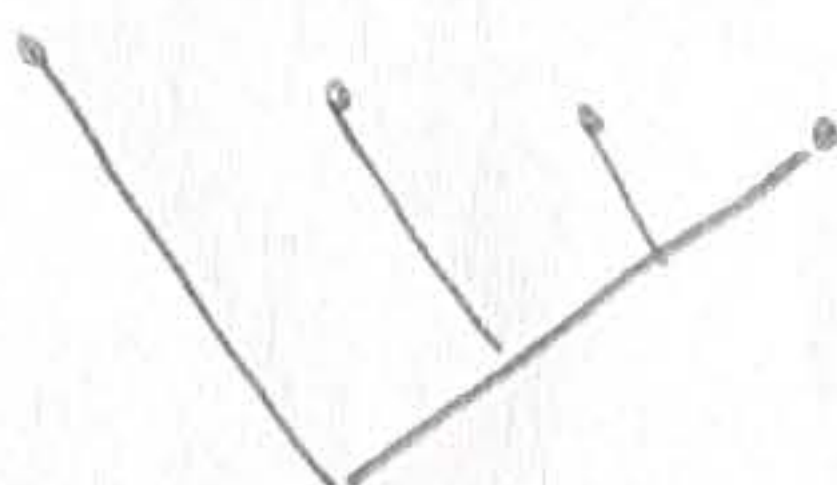
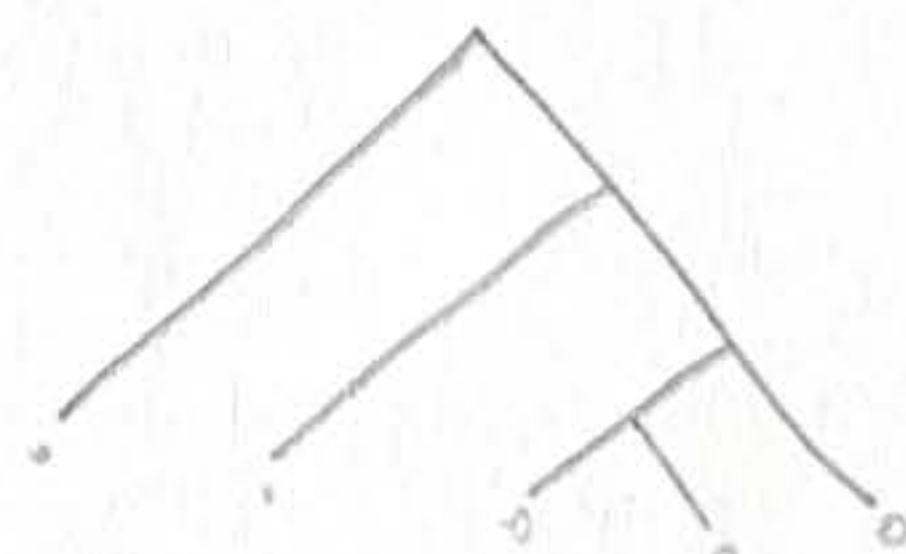
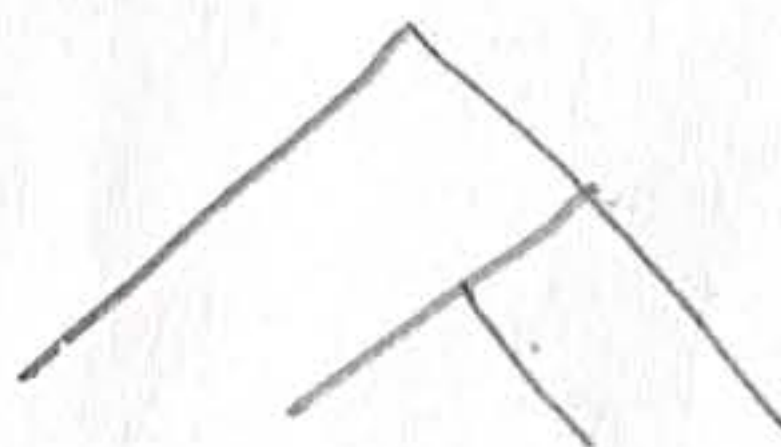
Graph #1



Graph #2



Tree #1



Tree #2



Thompson Gruppe F

Für das ~~Einheit~~ Intervall $I = [0, 1]$ betrachte
successive Halbierungen, in sogenannte dyadische
Teilungen. Für zwei solche Teilungen R, S
mit gleich vielen Schnitten betrachte stückweise
lineare Bijektion $f: I \rightarrow I$, die R in
 S überführt. Wir nennen solche f dyadisch.

Prop Sei f stückweise lineare Bijektion auf I .
Dann ist f dyadisch genau dann wenn
alle Steigungen $v_i = 2^k$ und alle Schnitte
rationale dyadische Koordinaten haben.

Bsp. x_0 und x_1

Dyadische Abbildungen bilden unter Komposition
die sogenannte Thompson Gruppe $F \subset \text{Homeo}(I)$.
Wir sehen direkt

Prop F ist unendlich und torsionsfrei.

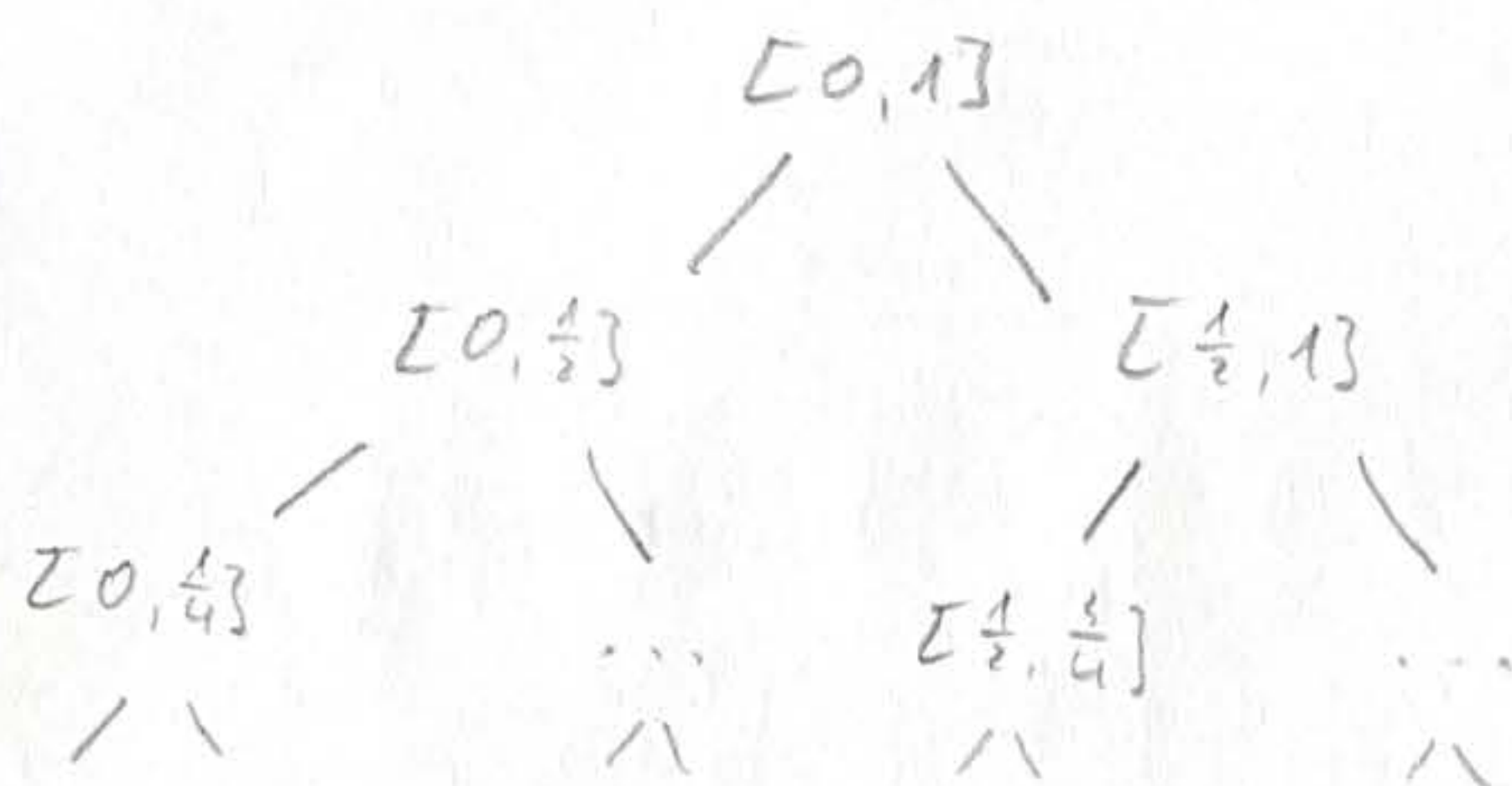
Beweis Für $\text{id}_I \neq f$, sei

$$t_0 = \inf \{ t \in [0, 1] \mid f(t) \neq t \}$$

mit Rechtsableitung 2^m , $m \neq 0$. Kettenregel
 gibt Ableitung für f^n ist 2^{mn} , also alle
 verschieden. $\square$

Die Gruppe F hat viele Interpretationen.

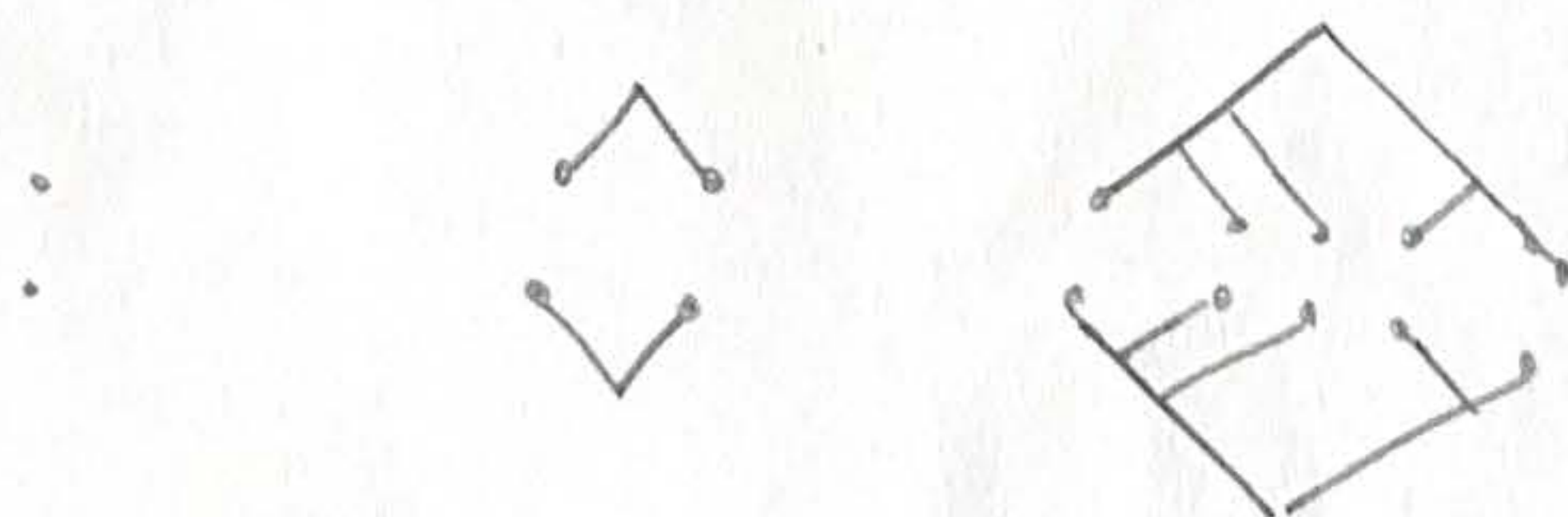
Mithilfe des binären Baumes B $f \in F$ kann als
 der binäre Baum B



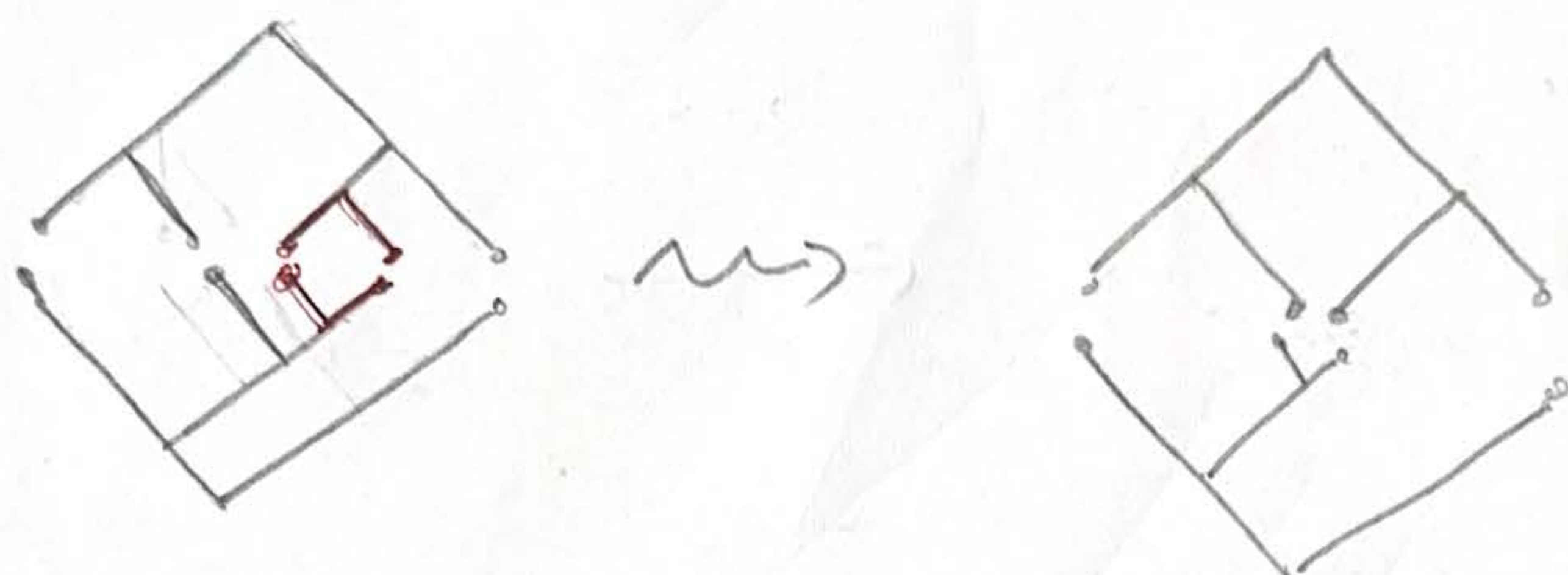
kann jede Teilung S interpretiert werden als
 endlicher Teilbaum $T \in B$. Jedes $f \in F$ kann also
Bsp x_0 und x_1

beschrieben werden als Paar endlicher binärer
 Bäume $f = \begin{bmatrix} T \\ u \end{bmatrix}$ sog. Baumdiagramme. Sind sie eindeutig?

Bsp Für $\text{id}_I \in F$, betrachte



Generell lässt sich ein Baumdiagramm reduzieren, indem man gegenüberliegende Coets entfernt.

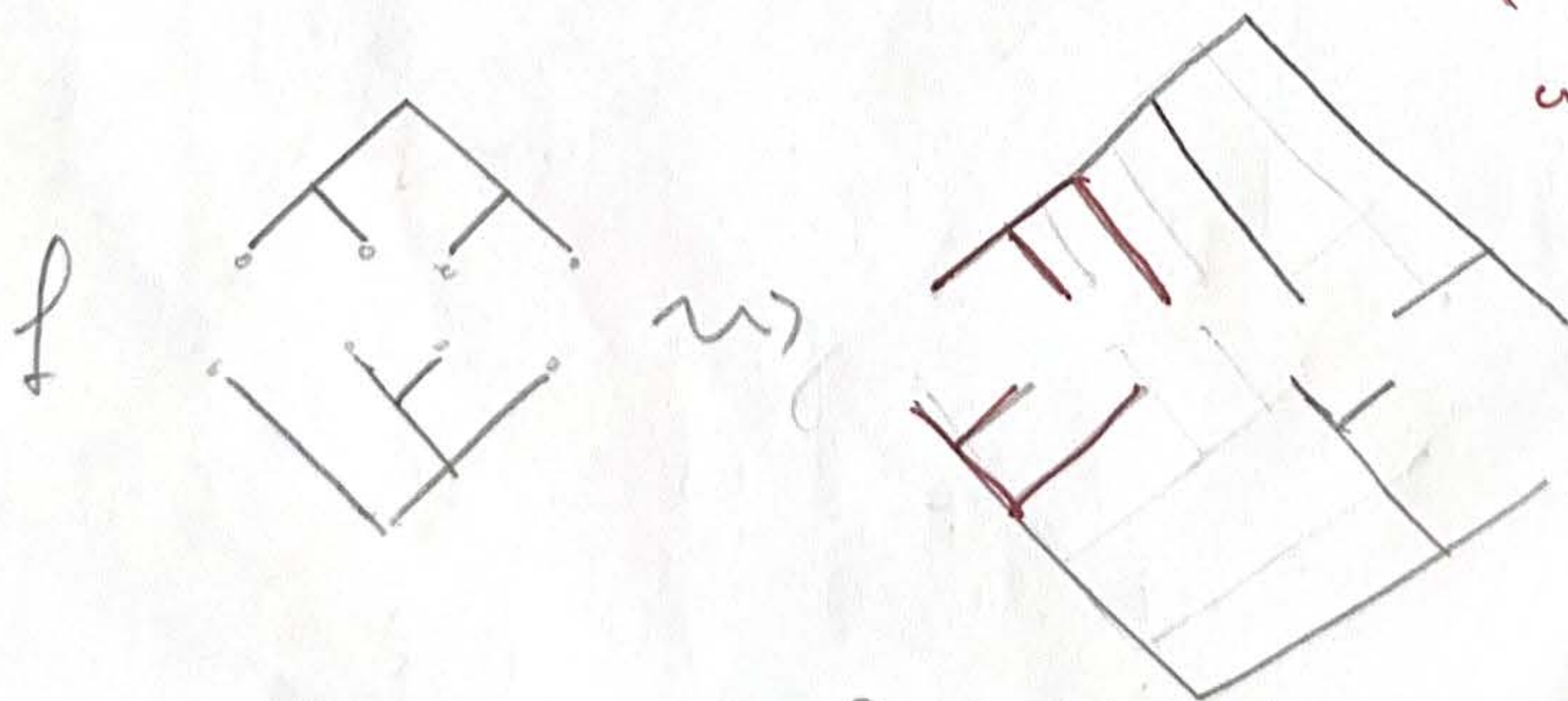


Es lässt sich leicht zeigen:

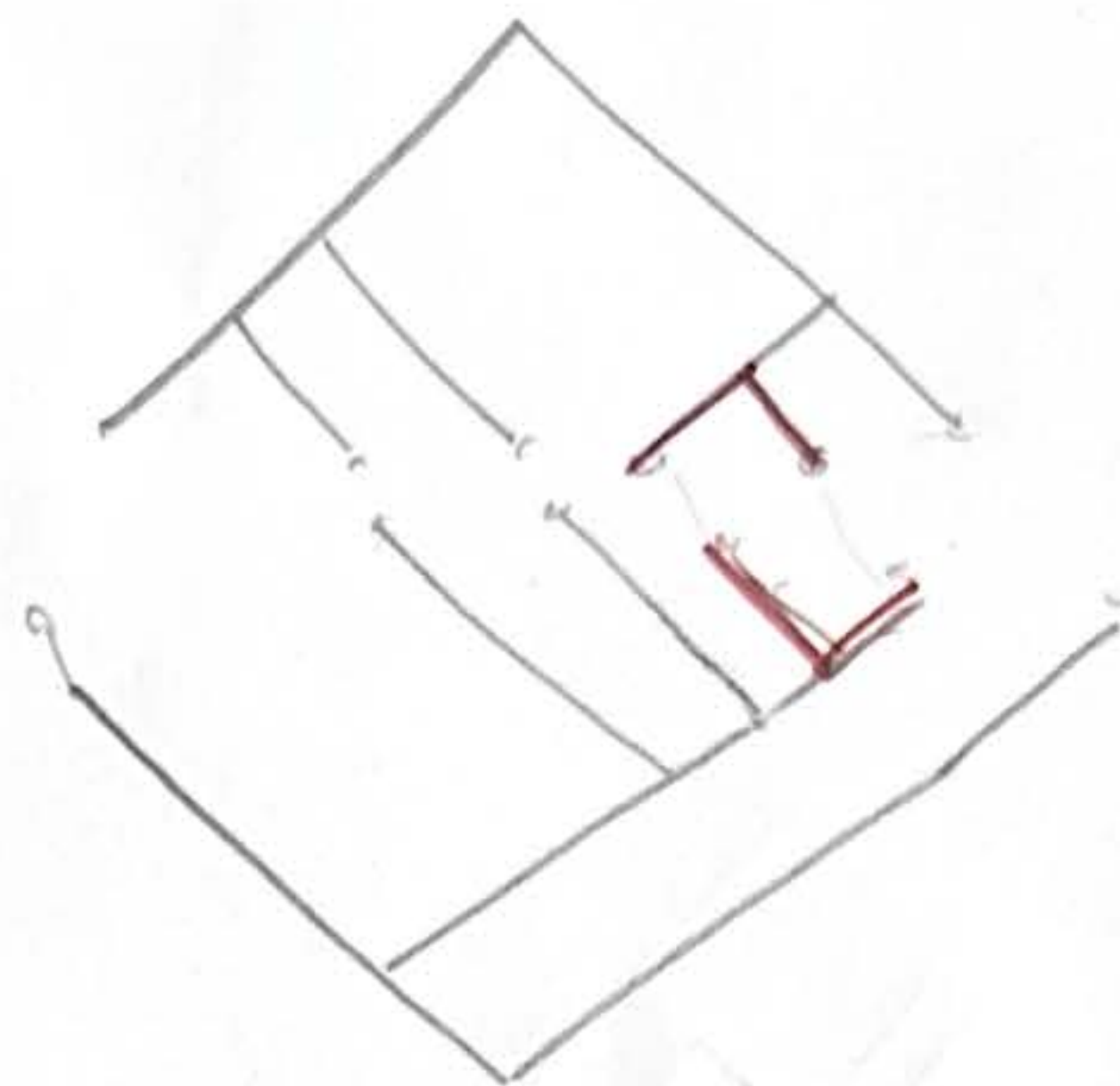
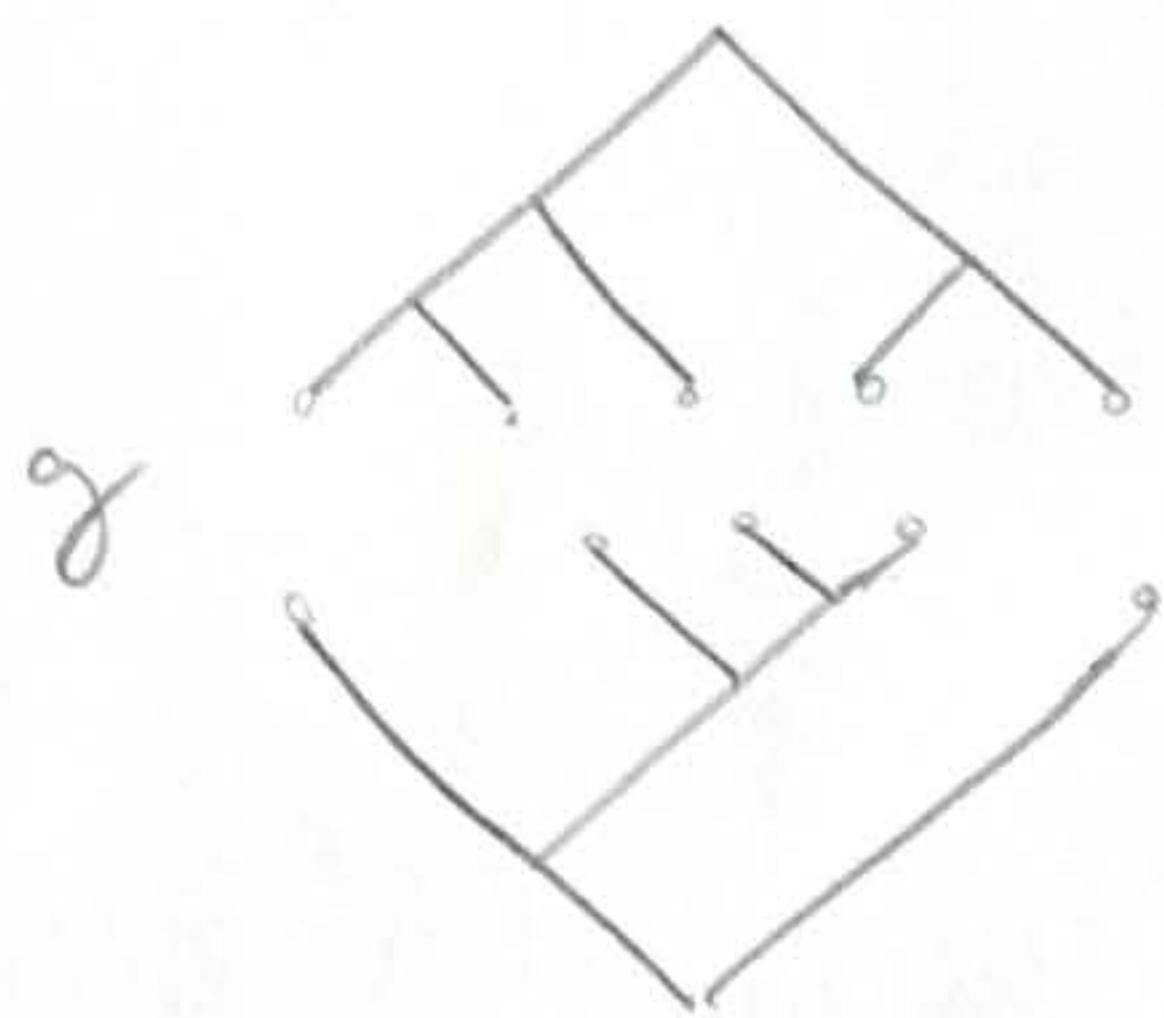
Thm. Jedes Baumdiagramm hat eindeutige reduzierte Form.

Es ist noch die Verknüpfung zu klären.
Bemerkung für $f = \begin{bmatrix} T \\ u \end{bmatrix}$ und $g = \begin{bmatrix} u \\ V \end{bmatrix}$ ist $fg = \begin{bmatrix} T \\ V \end{bmatrix}$. Für beliebige Elemente müssen wir den unteren Teil von f wie den oberen von g aussuchen lassen.

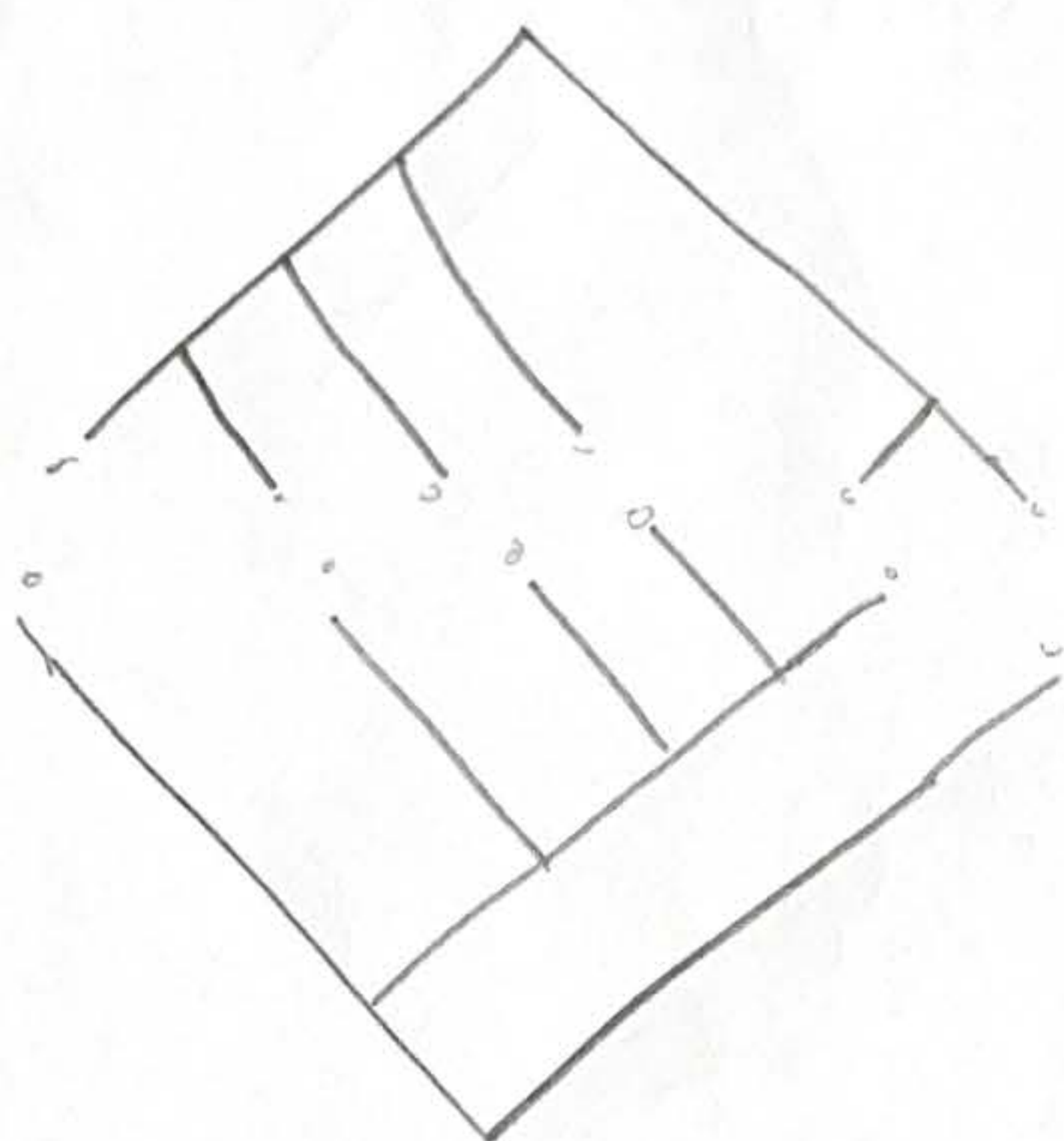
Bsp



(f und g zuerst untereinander nehmen)

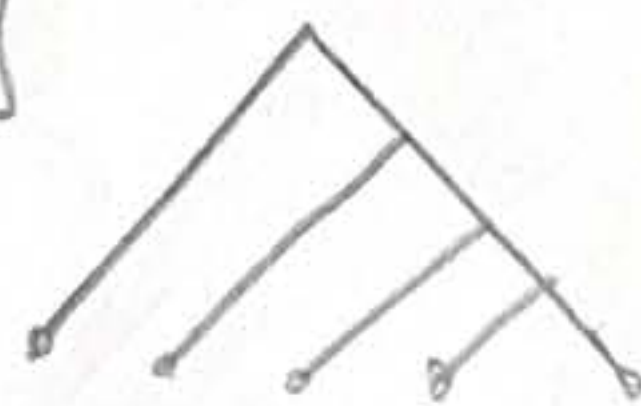


fg



Werde jetzt sehen, wann die Perspektive
fruchtvoll ist. Wir schneiden mit $\mathbb{F}$
oben die $\mathbb{F}$ -Kette T_0 .

- 1) Die untere Hälfte von $x_0, x_1, x_2, \dots \in \mathbb{F}$ habe
dieselbe Form, nur als rechte Rebe. Wir
nenne $f = [T]$ positiv, falls R eine



(rechte Rebe ist).

- 2) Ist T ein Baum, f sei $[T]$ positives Element mit
 T oben. Dann lässt sich jedes $f \in \mathbb{F}$ schreiben als

Produkt positive Elemente; $[u] = [T][u]^{-1}$.

3) Definiere die Breite $n = \#\{Blette\} - 1$. Für

$$k \leq n \quad \text{ist} \quad [T]x_k = [T \wedge k]$$

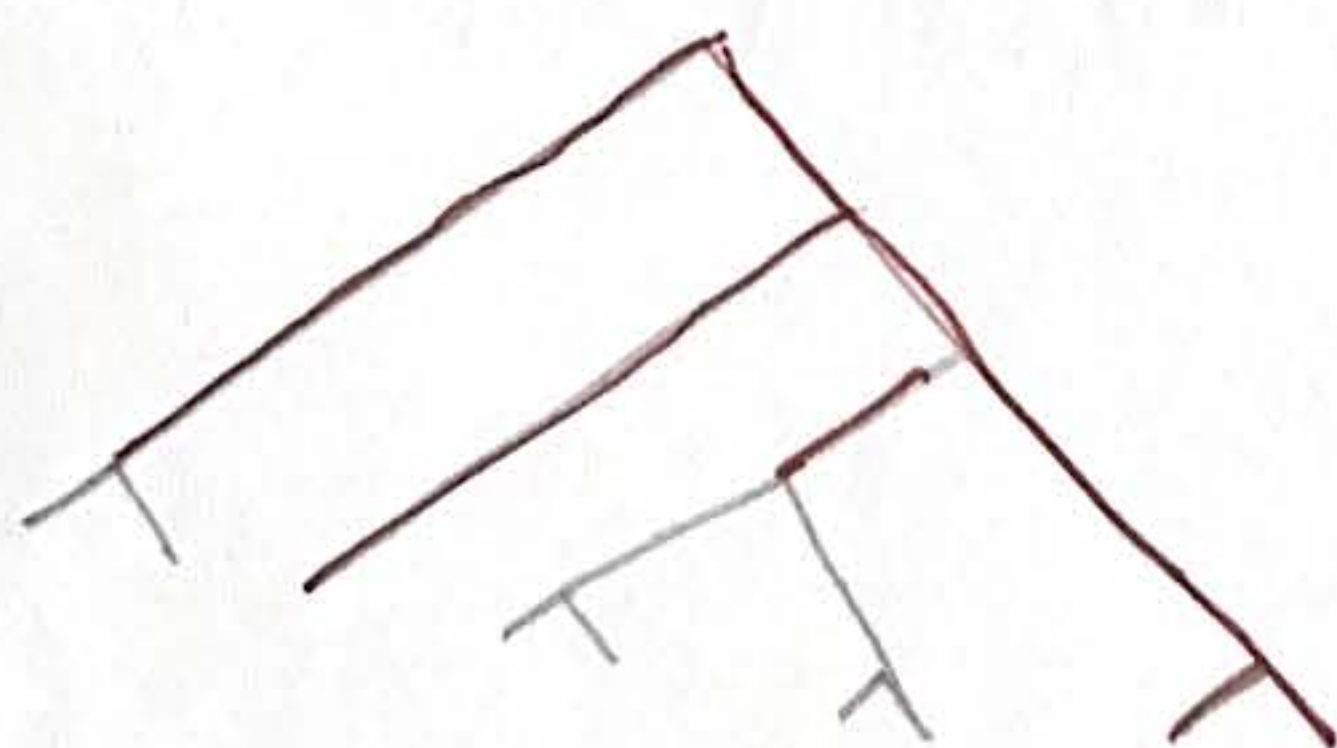
Lemma Für $k \leq n$ ist

$$[T]x_k = [T \wedge k]$$

mit $[T \wedge k]$ Baum mit Caet an k -te Stelle.

Bew. Für R Reihe der Länge $n > 1$ ist $[T \wedge n]$ ein Diagramm für $[T]$. Da $x_n = [V \wedge k]$ sind wir fertig. $[T]x_k =$ □

Definiere die rechte Halb von T als Reihe, die aus der Wurzel wächst. Anschaulich:



Indem wir mit dem (rechten) Halb anfangen, und sukzessiv Caets zu der Blette hinzufügen,

erhalten wir alle möglich Bäume T !
In andere Worte:

Kor Die Elemente $\{x_0, x_1, \dots\}$ erzeugen F .

Die wichtige Relation zu finden erfordert
mehr Arbeit. Es stellt sich heraus

Thm Für F existiert

i) Präsentation

$$F \cong \langle x_0, x_1, x_2, \dots \mid x_j x_i = x_i x_{j+1}, i < j \rangle$$

ii) Normalform, $f \in F$

$$f = x_0^{a_0} \cdots x_n^{a_n} x_n^{-b_n} \cdots x_0^{-b_0}$$

mit $a_n \neq 0$ oder $b_n \neq 0$ und $a_i, b_i \neq 0 \Rightarrow a_{i+1}, b_{i+1} \neq 0$.

iii) endliche Präsentation

$$F \cong \langle x_0, x_1 \mid [x_0 x_1^{-1}, x_0^{-1} x_1 x_0], [x_0 x_1^{-1}, x_0^{-2} x_1 x_0^2] \rangle$$

Kor Es existiert Untergruppe $F \oplus F \simeq F$.

Die nächste Eigenschaft ist offensichtlich durch die Präsentation.

Prop $F^{ab} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Bew $F^{ab} = \langle x_0, x_1, \dots \mid x_j + x_i = x_j + x_{i+1}, i < j \rangle$
 $= \langle x_0, x_1, \dots \mid x_1 = x_2 = \dots \rangle$
 $= \langle x_0, x_1 \mid x_0 + x_1 = x_1 + x_0 \rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad \square$

(Alternativ benutze endliche Präsentation).

Das können wir geometrisch deuten.

Def Definiere $\phi: F \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ als

$$\phi(f) = (\log_2 f'(0), \log f'(1))$$

Das ist Homomorphismus durch Kettenregel. Beachte, dass

$$\phi(x_0) = (1, -1), \quad \phi(x_1) = (0, -1)$$

Können wir nun zu Eigenschaften von $\mathbb{T}$.

Prop Sei $[a, b] \subset I$ ein dyadischer Intervall, also $0 \leq a < b \leq 1$ dyadisch. Sei $\mathbb{T}[a, b] \subset \mathbb{T}$ die Untergruppe bestehend aus $f \in \mathbb{T}$ mit

$$\text{Supp}(f) = \{t \in I \mid f(t) \neq t\} \subset [a, b]$$

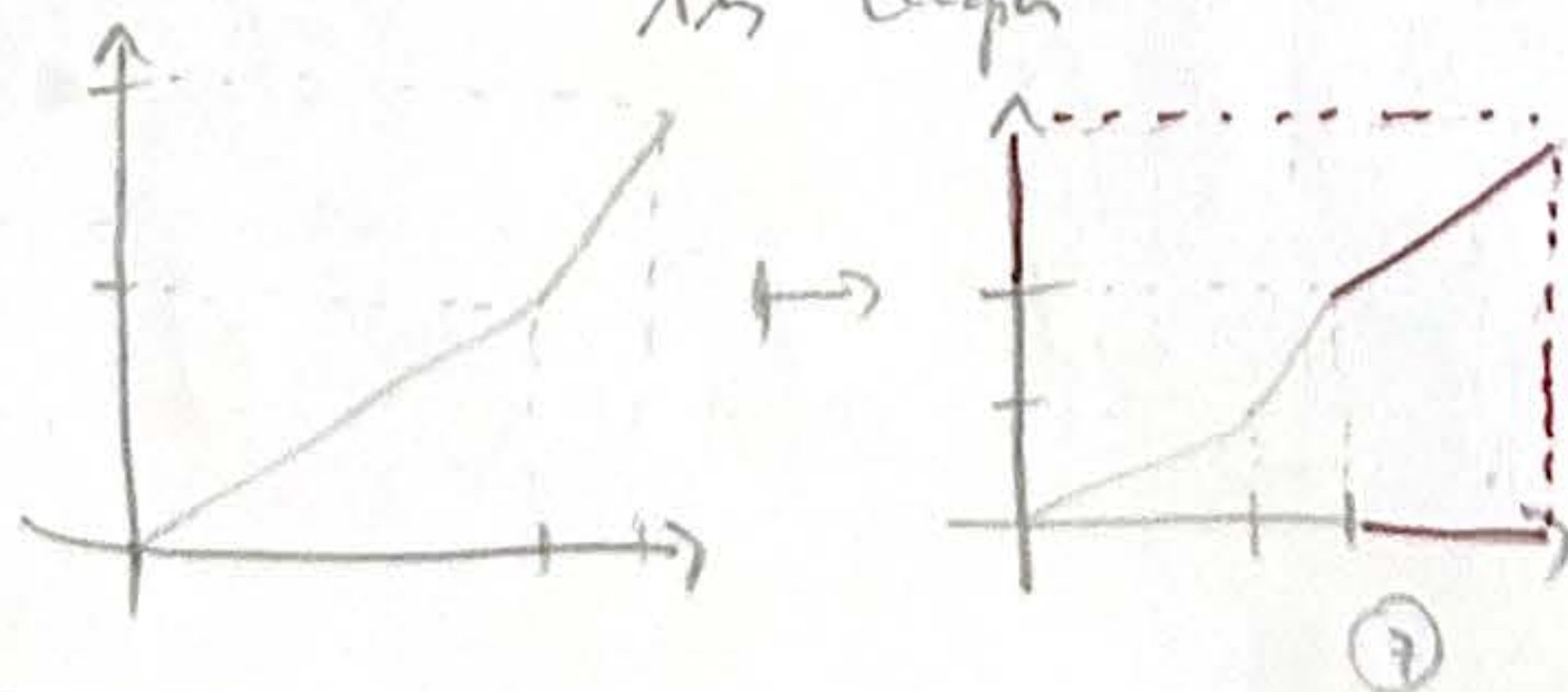
Prop Es gilt $\mathbb{T}[a, b] \cong \mathbb{T}$.

Bew Wähle Überdeckung von $[a, b]$ aus Standard dyadischen Intervallen, so dass gleiche Anzahl I überdeckt. Können $\gamma: I \xrightarrow{\sim} [a, b]$ bestehen so dass Steigung $v_i = 2^k$ und Schnitte an dyadischen Koordinaten haben. Also verträglich mit Gruppenstruktur! $\square$

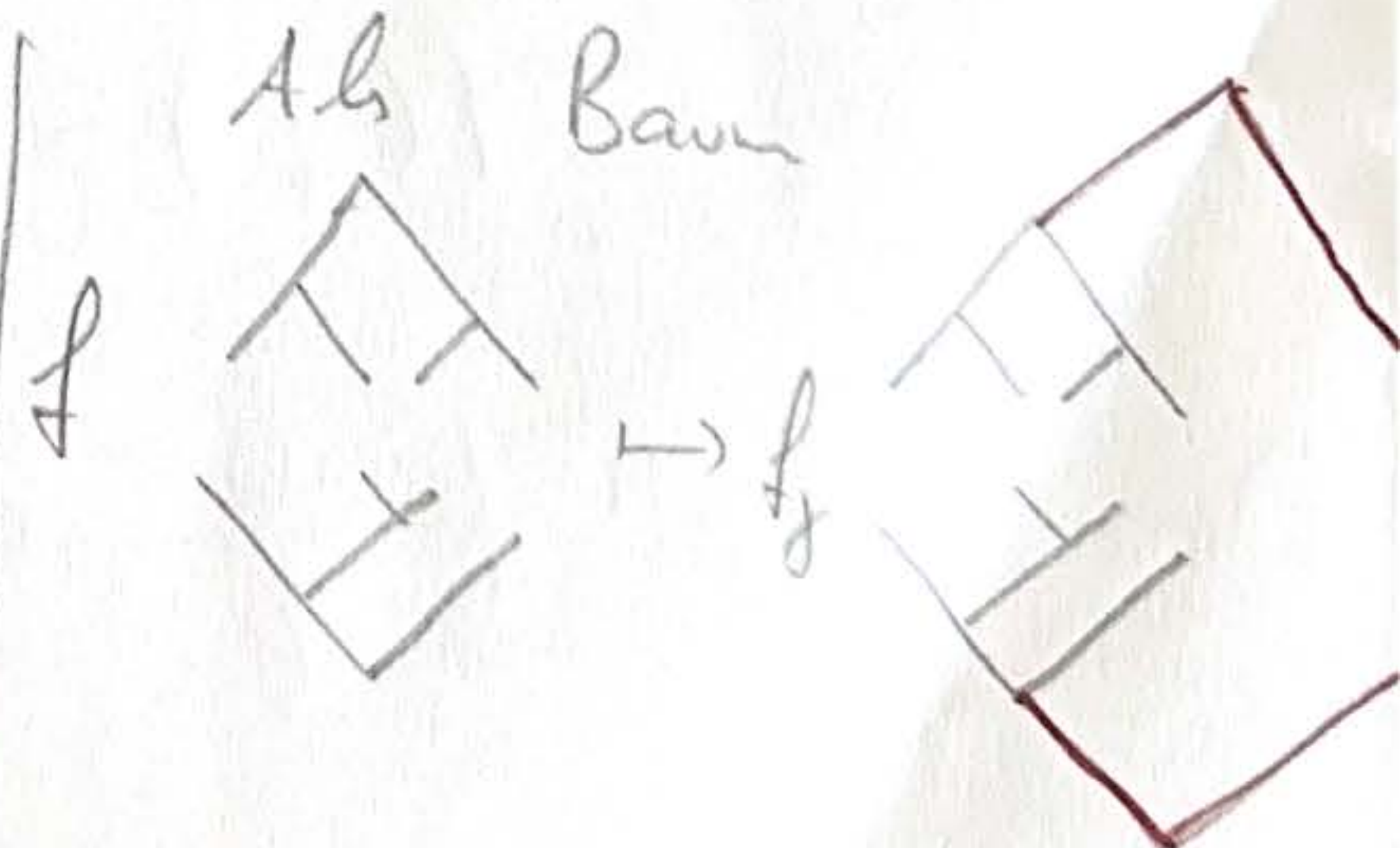
Bsp $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}[0, \frac{1}{2}]$

$$f \mapsto [f_\gamma(t) = \begin{cases} f(2t)/2 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ t & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}]$$

Ab Graph



Ab Baum



Da sie $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ erzeugen, ist ϕ surjektiv.
Da sie linear unabhängig, ist der Kern
gerade $[\mathbb{F}, \mathbb{F}]$.

Wir sehen:

- Jede echte Quotient ist abelsch
- $[\mathbb{F}, \mathbb{F}] \subset \mathbb{F}$ ist einfach
- Jede Untergruppe ist entweder endlich Ray
frei abelsch oder enthält unendlich Ray
frei abelsch.