



①

Ausblick GGT

"algorithmische Fig."

IA.

GG

"automatische Gruppen"

Algebra

Topologie

GGT

Wachstum

$\pi_1(\text{Mfd.})$

Enden

Geometrie

MPC

autom. cont.

$\mathcal{C}_1$ (finiteness prop.)

"Classifying spaces"

~~Algebra~~

"Geraden in Cayley Graph"

Fixpunkteigenschaften

Heute werfen wir einen Blick auf 3 ausgewählte

Zusätzliche Themen:

- Wachstum
- Enden
- Nicht positive Krümmung.

§1 Wachstum:

Gegeben gp G , $S = \langle S \rangle$.

Frage/Problemstellung: Wie verhält sich die

Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$n \mapsto \# B_n(e_G) \subseteq \text{Cay}(G, S)$$

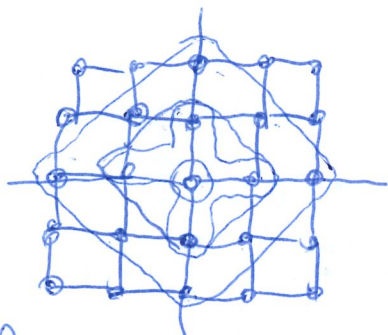
"qualitativ" in n ?

Bsp:

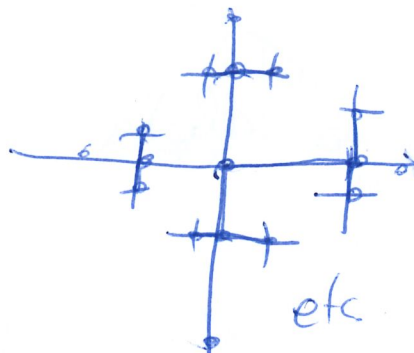
②

① $G = \mathbb{Z}^2, \langle a, p \rangle, \langle a, 1 \rangle$

② $G = \mathbb{F}_2, \langle a, b \rangle$



$\leadsto f(1) = 5 \leadsto f(n) = 2n^2 + 2n + 1$
 $f(2) = 13$



$\leadsto f(1) = 5 \leadsto f(n) = 2 \cdot 3^n - 1$
 $f(2) = 13$

Frage: ① "wie fein" wollen wir Fkt. unterscheiden?

② Abhängigkeit von Wahl von S ?

Def.: f, g zwei Wachstumsfunktionen. $f \leq g \iff \exists \lambda \geq 1$:
 $f(n) \leq \lambda \cdot g(\lambda n + 1) + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$f \sim g \iff f \leq g$ und $g \leq f$.

Lemma: Sei $G = \langle S \rangle = \langle T \rangle$, $\#S, \#T < \infty$.

Seien f_S und f_T die entsprechenden Wachstumsfunktionen. Dann gilt $f_S \sim f_T$.

Beweis: Schreib $|g|_S \leq |g|_T \cdot \lambda \quad \forall g \in G$. $\square$

Bem: " $\sim$ " sieht Exponenten bei Polynom, aber nicht den Vorfaktor. Z.B. $n^2 \sim 15n^2 \not\sim n^3$.

Aber: $2^n \sim 3^n$ (!)

2 abschließende Theoreme / Vermutungen

Theorem (Gromov '81): Eine Gruppe hat polynomielles Wachstum genau dann, wenn sie virtuell nilpotent ist.

$G = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = \{1\}$,
 $G_{i+1} = [G_i, G_i]$



Theorem (Grigorchuk '84): Es gibt eine

Gruppe, deren Wachstum echt zwischen polynomiellem und exponentiellem Wachstum liegt

$\leadsto$ UG von $\sqrt[n]{n}$ (rooted tree T_n) $\leadsto$ $f(n)$

Vermutung: $\forall G$ mit $p(n) \leq f(n) \leq \exp(n)$ $\forall p$
gilt $\exp(\sqrt{n}) \leq f(n) \leq \exp(n)$ "gap conjecture".

§2 Enden von Gruppen

$\leadsto$ "Asymptotisches Verhalten von Gruppen".

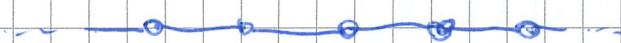
Frage: Wie sieht $\text{Cay}(G, S)$ "bei ∞ " aus?

"Genauer": Wie viele Zusammenhangskomp. gibt es?

Bsp:

① $G = \mathbb{Z}$

$G = \mathbb{F}_2$

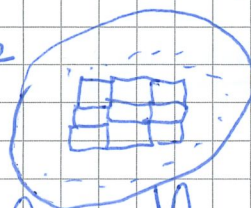


$\leadsto \mathbb{Z}$

$\leadsto \infty$, Kantenmenge

G endlich

$G = \mathbb{Z}^2$



$\leadsto 1$ zsh.-Komp.

$\leadsto 0$

Definition: Sei Γ zsh., lokal endl. Graph, und

$B(n)$ der Ball mit Radius n (um irgendeinen Knoten).

Definiere $\|\Gamma - B(n)\|$ als die Anzahl der zsh., unbeschr. Komponenten des Komplements von $B(n)$.

Def: Die Anzahl der Enden von Γ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Gamma - B(n)\|$. $\leq \infty$, kann aber ∞ sein.

Bem: Das ist unabh. von der Wahl des Basispunktes! (4)

Theorem: Sei $G = \langle S \rangle = \langle T \rangle$, $\#S < \infty$, $\#T < \infty$.

Dann ist $e(\text{Cay}(G, S)) = e(\text{Cay}(G, T))$.

Beweis: ^{3470:} 2 Knoten im Komplement von $B_S(\mu \cdot n + \mu)$ liegen außerhalb von $B_T(n)$ + können auch dort außerhalb von $B_T(n)$ verbunden werden. und dort mit Kurzenweg verbunden werden können.

Frage: Welche Werte kann $e(G)$ annehmen?

Thm (Freudenthal-Hopf 1935): $e(G)$ endl. erzeugt $\Rightarrow e(G) \in \{0, 1, 2, \infty\}$.

Thm (Schilling 1971): $e(G) > 1 \Leftrightarrow G$ Baum ohne Kanteninversionen + mit endl. Kantenstabilisatoren.

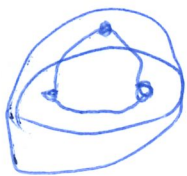
Bem Prop: $e(G) = 2 \Leftrightarrow G$ virtuell $\mathbb{Z}$.

$\rightarrow$ 1 ended gps verstehen ist wichtig + schwierig.
 $\rightarrow$ $\rightarrow$ "aktuelle" Forschung

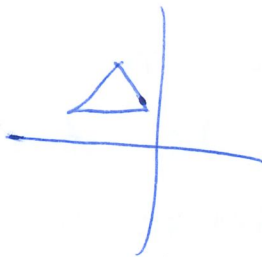
§3 Nichtpositive Krümmung.

Idee: Dreiecke:

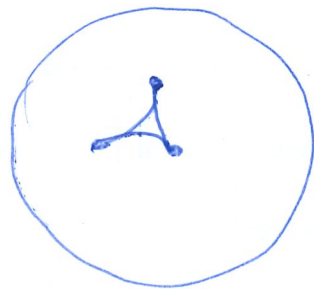
①



②



③





(1)

Def: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Kurve

Bsp: $\gamma: I \rightarrow X$ heißt Geodäte, falls $L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$.

X heißt geodätisch, falls sich ^{je zwei} ~~alle~~ Punkte durch eine Geodäte verbinden lassen.

Bsp: $\mathbb{R}^n, S^n, H^n, \dots$ nicht: $\mathbb{R}^2, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Def: Sei (X, d) geodätisch. Ein Dreieck ist eine Tupel $(A, B, C, \alpha, \beta, \gamma)$ von Punkten A, B, C und Geodäten $\alpha: A \rightarrow B, \beta: B \rightarrow C, \gamma: A \rightarrow C$.

• X heißt $CAT(0)$, wenn alle Dreiecke in X "nicht dicker" als in $\mathbb{E}^2$ sind. Bilder!

• X heißt S -hyp., falls $\exists \delta \geq 0: \forall$ Dreiecke ist $\delta \cdot \text{im}(\gamma)$ bereits in einer S -Umgebung

Bsp: Bäume. { von a in $(a) \cup \text{im}(\beta)$ enthalten. }

Def: Eine f.s. Gruppe heißt S -hyp. / $CAT(0)$, falls sie eigentlich diskontinuierlich kompakt via Isometrien auf einem solchen Raum operiert. z.B. $\forall K: \# \text{Geb.} / \text{Lsg.} < \infty$

Bsp: $F_2, D_{\infty}, \dots$ (gps trees ...) sind $CAT(0)$ und S -hyp.

• Cayley Gruppen sind $CAT(0)$ (!!) und S -hyp.
 $\rightarrow$ kein $\mathbb{Z}^2$ -UG (!!)

Thm: G endl. erzeugt, $CAT(0)$ Dann:

- G endl. präsentiert.
- G hat lösb. Wortproblem

- Jede abelsche UG. ist endl. erzeugt

Thm: G hyperbolisch. Dann

- Wortproblem lösbar
- G entweder virtuell auflösbar oder enthält $\mathbb{F}_2$
(no Tits-Alternative)
- Torsions UG in G sind endlich

→ Welche Gruppen sind "UPC" in diesem oder anderen Sinne?
 → Welche Eigenschaften folgen aus diesen Begegn. Ideen?

Offen: z.B.

- Torsions UG in CAT(0) Gruppen endlich?
- Sind hyperbolische Gruppen residuell endlich?