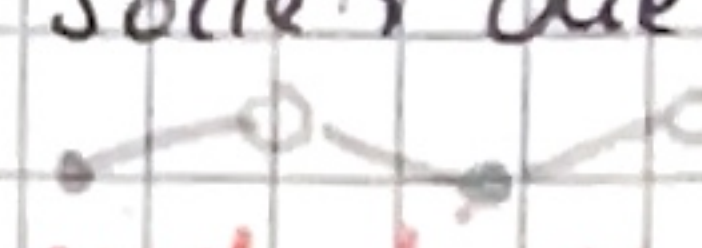


Freie Produkte von Gruppen

no bisher direktes Produkt $G = A \oplus B$
jetzt:

Freie Produkte

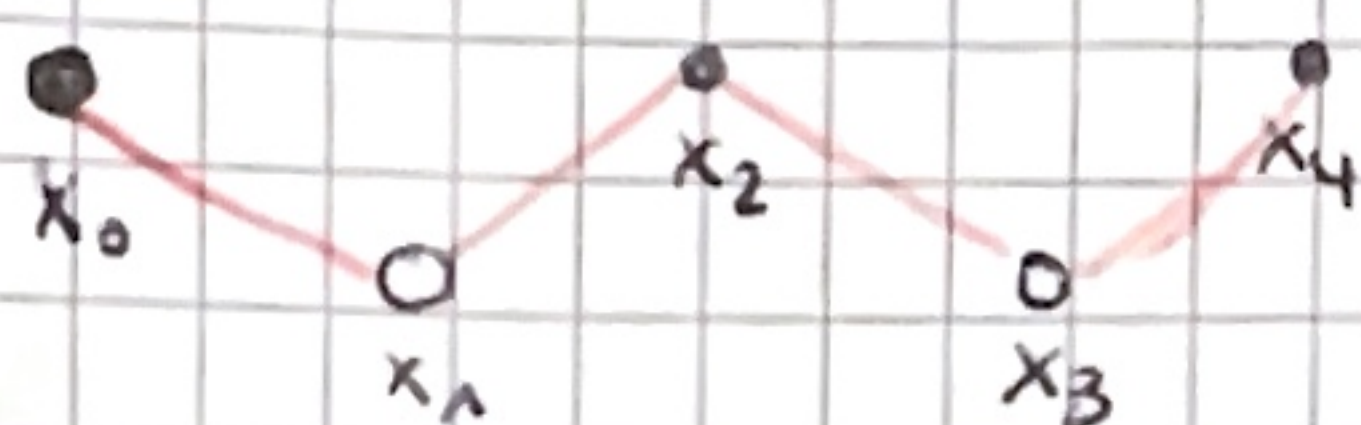
Grundidee: Wir wollen eine Gruppe aus zwei Gruppen A und B konstruieren, dabei sollen die beiden Gruppen nicht interagieren
(Ziel:  Elemente aus A , Elemente aus B)
insb. sind diese Gruppen in A nicht kommutativ
no im Beispiel zeigen

Vorarbeit:

Definition reduziertes Wort: (Wir bezeichnen $\{A \cup B\}$ als Alphabet)
Wir bezeichnen ein Wort $w = (x_1 x_2 \dots x_n) \in \{A \cup B\}^*$ als reduziertes Wort, falls

1. $x_i \neq 1_A$ und $x_i \neq 1_B$

2. falls $x_i \in A$, dann $x_{i+1} \notin A$, analog falls $x_i \in B$, dann $x_{i+1} \notin B$



Ziel: diese reduzierten Wörter sollen unsere Elemente in dem freien Produkt $A * B$ repräsentieren

Dafür brauchen wir eine Äquivalenzrelation auf die Menge aller Wörter (damit auch "das Produkt" zweier Elemente (also zwei reduzierte Wörter) reduzierte Wörter (also wieder in $A * B$ sind) (vgl. Verknüpfung von Iteration))

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\{A \cup B\}^*$ mit

1.) $w \sim 1_X w' \sim w w'$, wobei $X \in \{A, B\}$

2.) $w \cdot a b \cdot w' \sim w \cdot c \cdot w'$, wobei $ab = c$ in A oder in B
(Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\{A \cup B\}^*$)

Definition Freies Produkt von Gruppen $[w]$ = Äquivalenzklasse vom Wort w

$$\{[w] \mid w \in \{A \cup B\}^* \text{ Wort}\} = A * B$$

- mit Operation $[w_1][w_2] = [w_1 w_2]$
- $1_{A * B} = []$ "leerer String"
- und für $w = (x_1 x_2 \dots x_n)$ ist $[w]^{-1} = [w^{-1}] = [x_n^{-1} \dots x_1^{-1}]$

Theorem 1 Jede Äquivalenzklasse $[w]$ für $w \in \{A \cup B\}^*$ enthält genau ein reduziertes Wort. *Beweis evtl. noch vorbereiten!*

Damit folgt: Die Gruppen A, B induzieren injektive Abbildung nach $A * B$

Theorem 2 Jedes freie Produkt von Gruppen $A * B$ kann als Gruppe von Symmetrien, *oder* einem biregulären Baum $\mathcal{T}$, dargestellt werden.

Formulierung? *Wieder Gruppe kann als regulärer Baum $\mathcal{T}$ dargestellt werden?*
Der zugehörige Fundamentbereich besteht aus einer einzigen Kante und zwei Knoten.
Sind A und B endlich, so ist dieser Baum gerade $\mathcal{T}_{|A|, |B|}$.

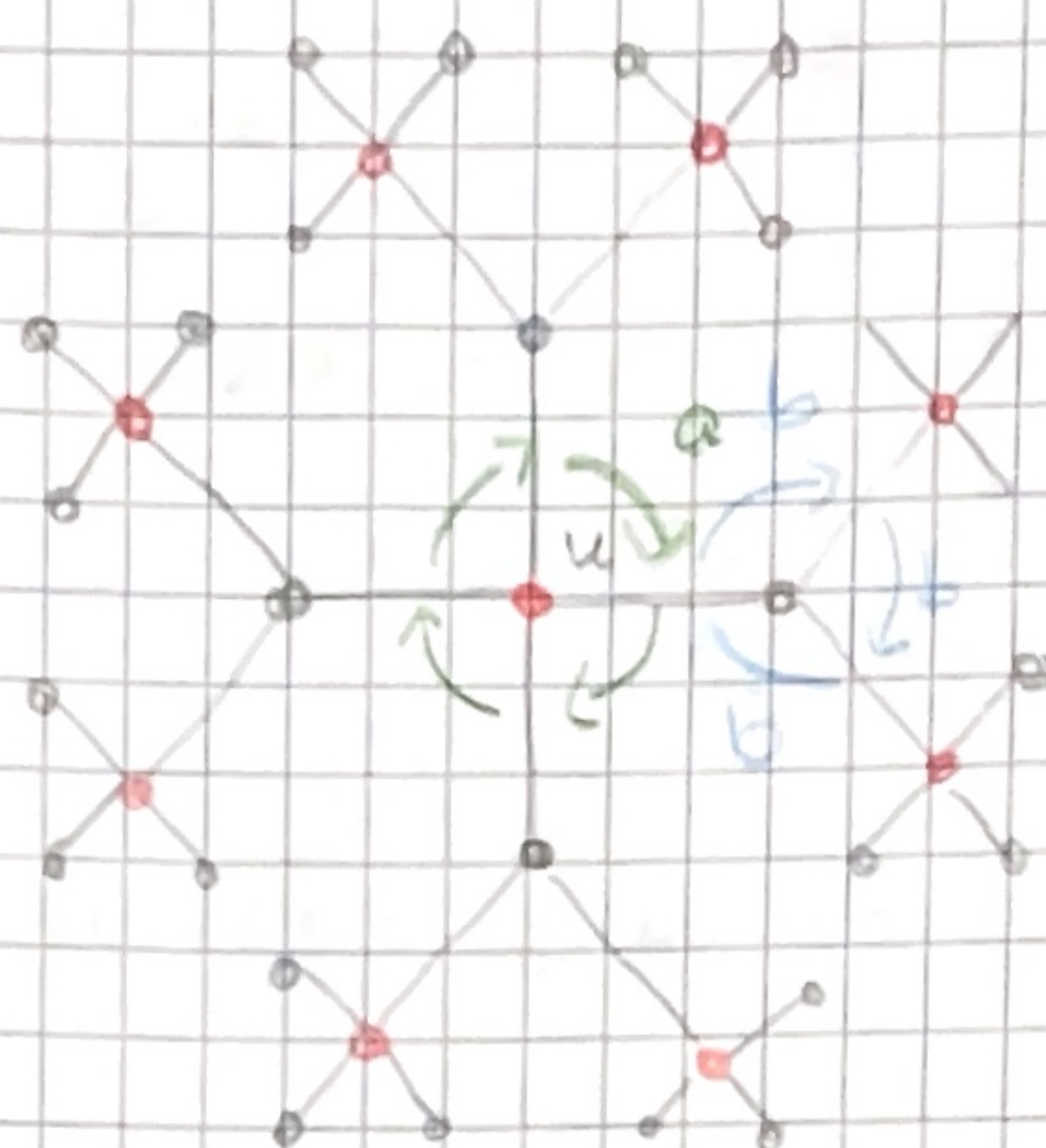
Beispiel: $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4 = G = \text{Sym}(\mathbb{Z}_{12})$

2

Wir können $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4$ durch zwei Rotationen erzeugen, wobei $a \in G$ eine zyklische Untergruppe der Ordnung 4 erzeugt ($\mathbb{Z}_4$) und $b \in G$ eine zyklische Untergruppe der Ordnung 3 ($\mathbb{Z}_3$)

Graphische Darstellung:

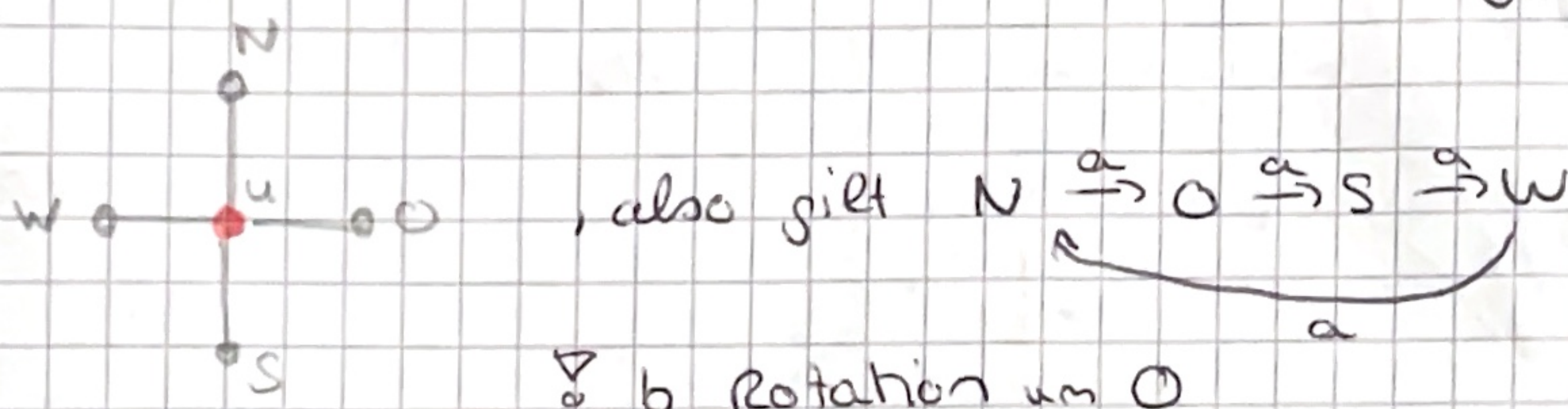
∇a Rotation um Ursprung



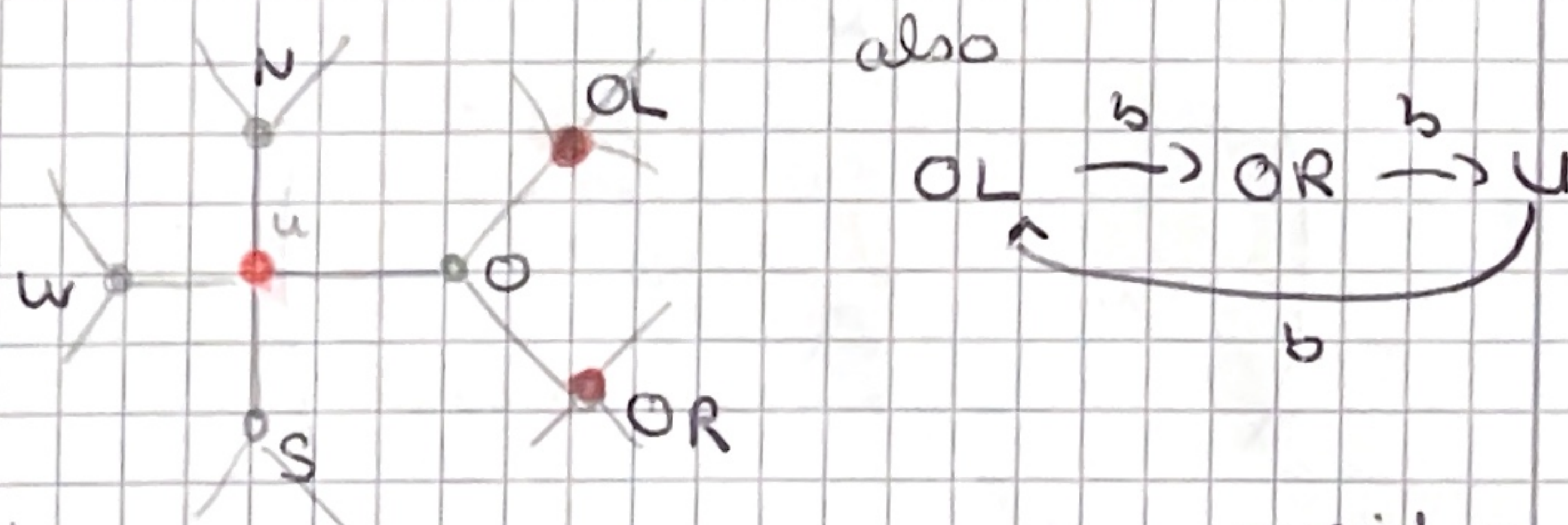
$u = \text{Ursprung}$

Um die Rotationen besser zu verstehen, benennen wir jede Ecke eindeutig über folgende Art und Weise:

- Sind wir an einer Ecke mit Valenz 4, dann existieren vier Kanten, die diesen Ecke mit einer weiteren Ecke verbinden. Diese bezeichnen wir mit den vier Himmelsrichtungen:



- Sind wir an einem Knoten mit Valenz 3, dann bezeichnen wir die beiden Punkte, die weiter weg vom Ursprung sind, weiter mit L für die linke Ecke und R für die rechte Ecke:



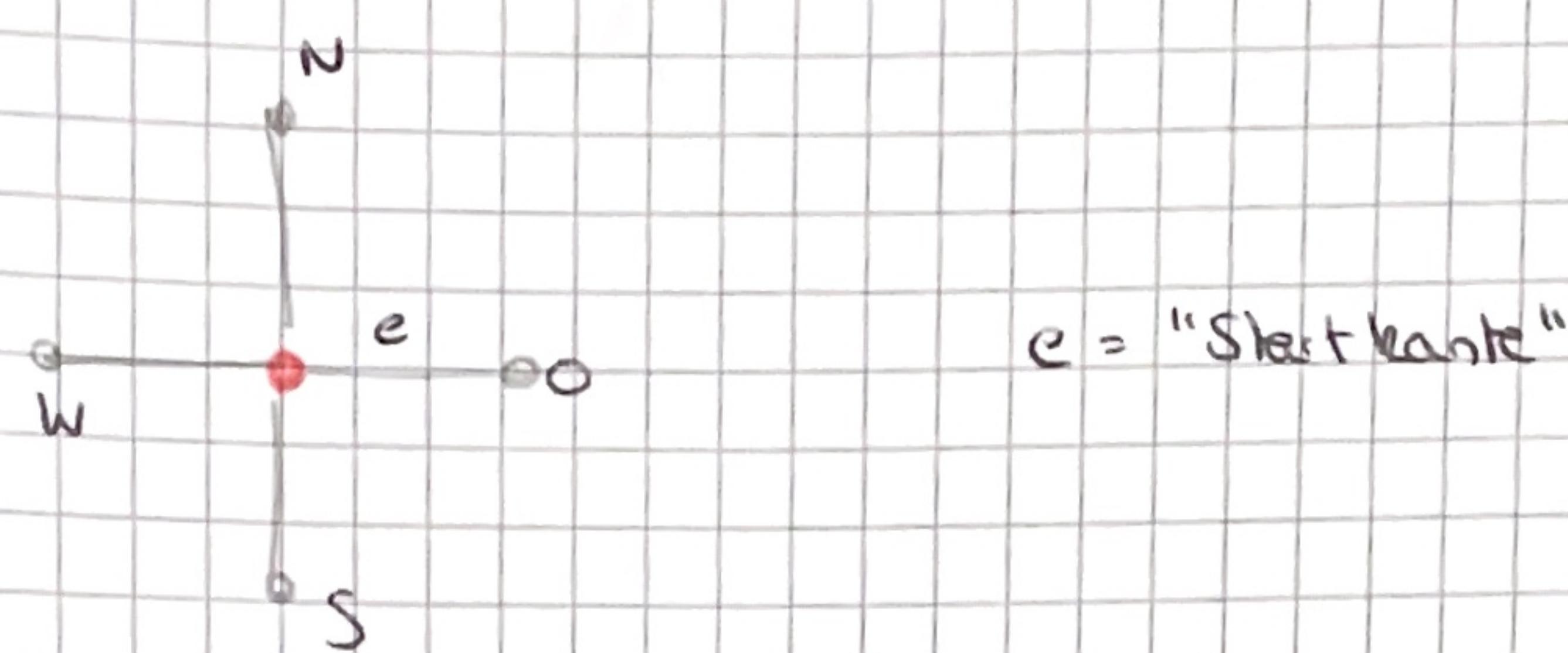
Die neuen ^{Ecke} ~~Knoten~~, den wir von einer Ecke ^{erreichen} * gehen, bezeichnen wir dann mit *L, *R, *N, *S, *W, falls die neue Ecke weiter entfernt vom Ursprung ist. Wir definieren ~~den Knoten~~, die von einem Punkt mit Valenz 4 zum Ursprung zurückweist als die "Osten-Ecke"

Wir zid
wollen
späte
zeigen

Wir können jedes Element $g \in G$ als Produkt der Rotationen a und b darstellen.

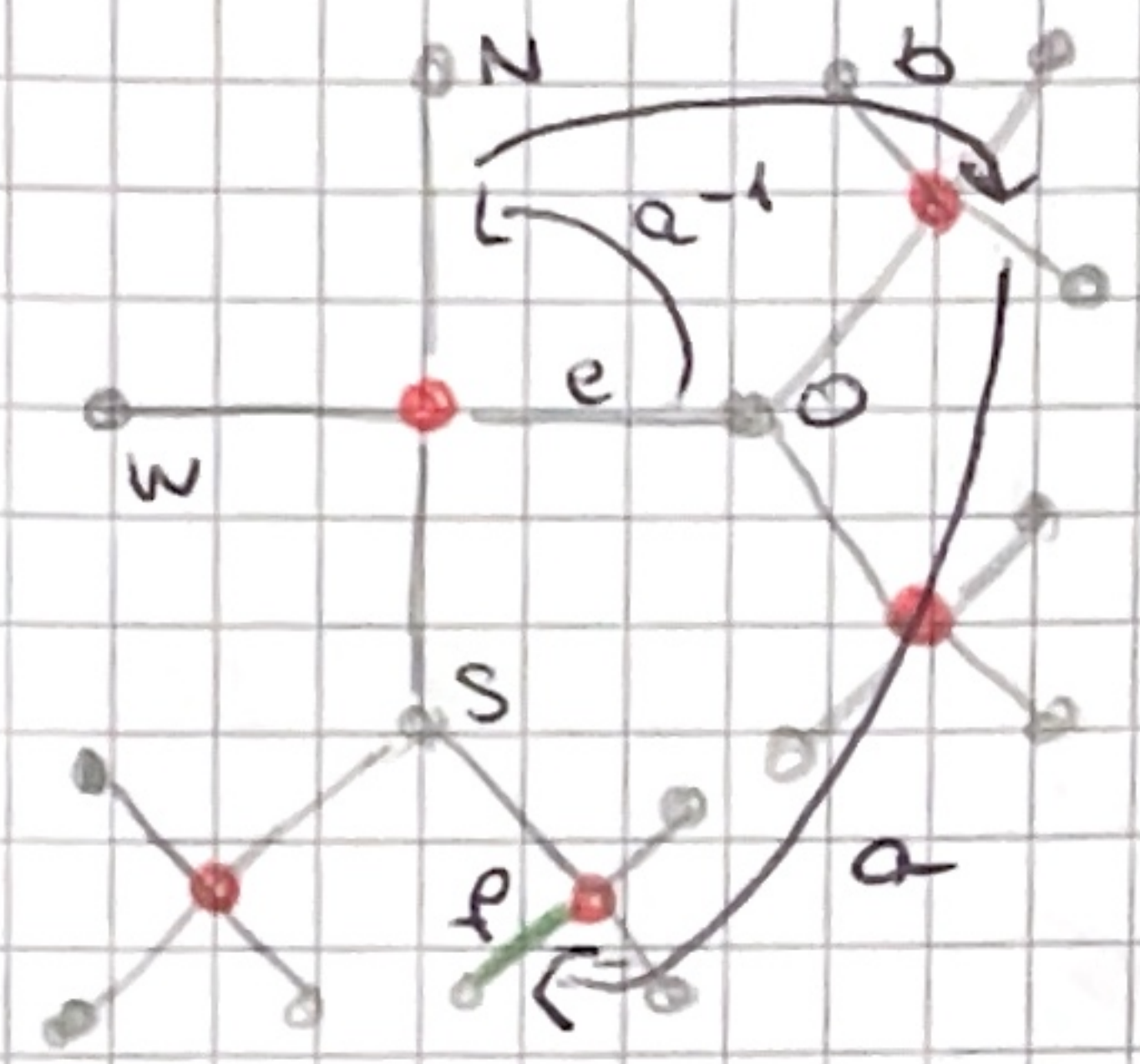
$g = a^{i_1} b^{j_1} \dots a^{i_n} b^{j_n}$, wobei $1 \leq i_k \leq 3$, $1 \leq j_k \leq 2$, i_k und j_k können auch 0 sein

Wir bezeichnen e als Kante zwischen dem Ursprung und 0:

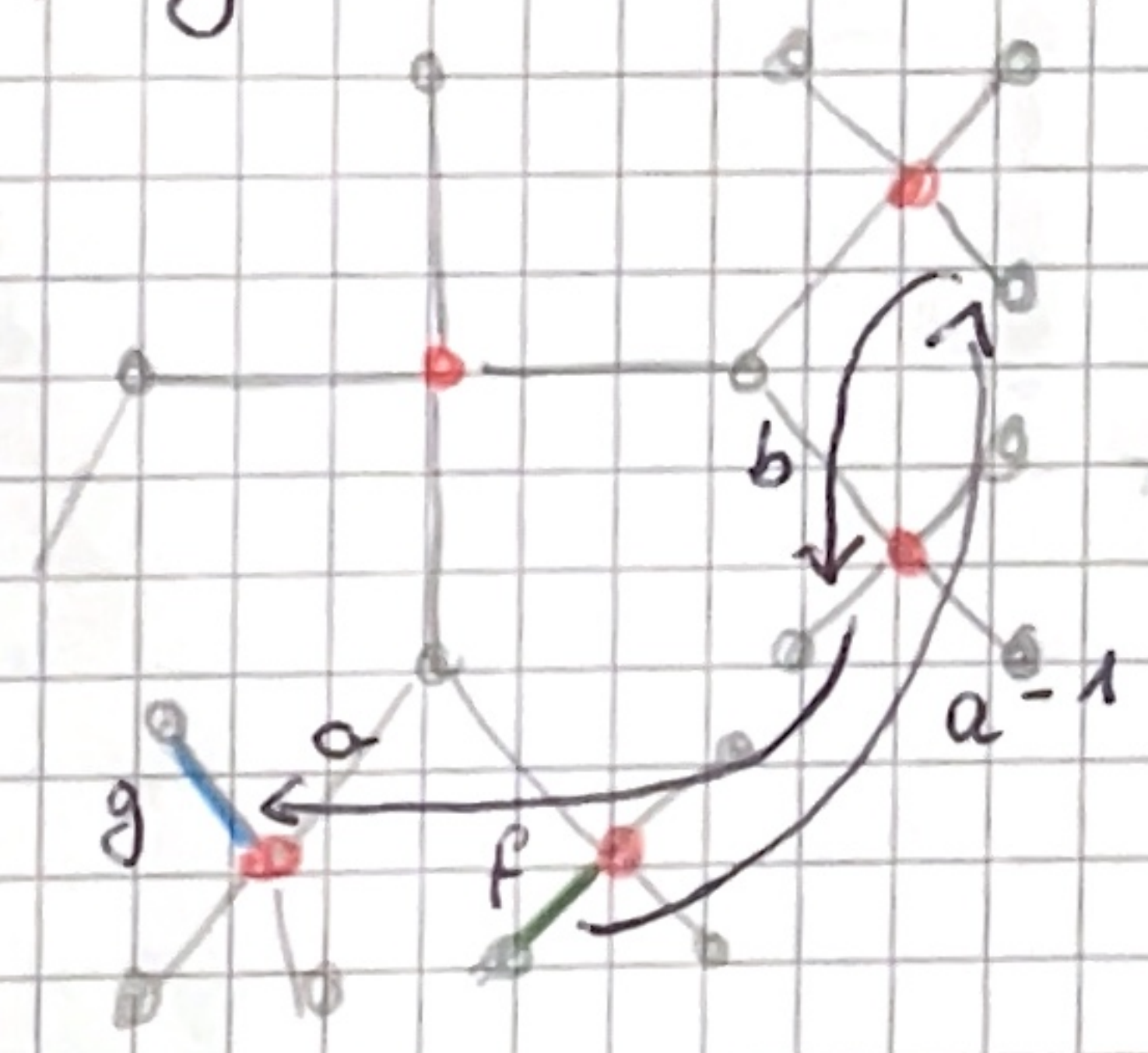


Beispiele für Elemente in $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4$:

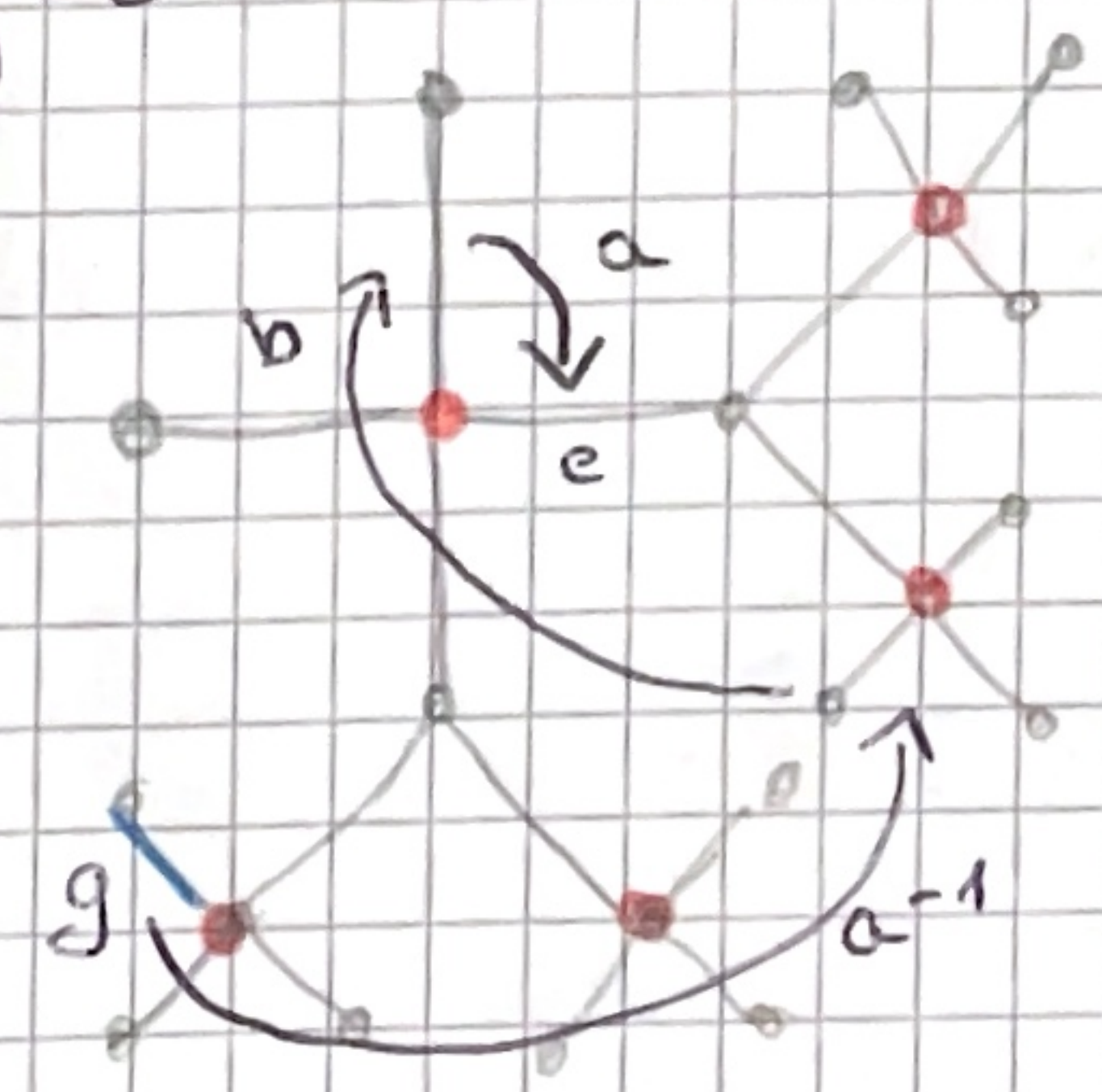
$aba^{-1} = f$



$(aba^{-1})f = g$:



$(aba^{-1})g = e$:



$\Rightarrow aba^{-1}$ gibt uns eine Rotation um die Ecke S!

Analog:

• a^2ba^{-2} gibt eine Rotation um W

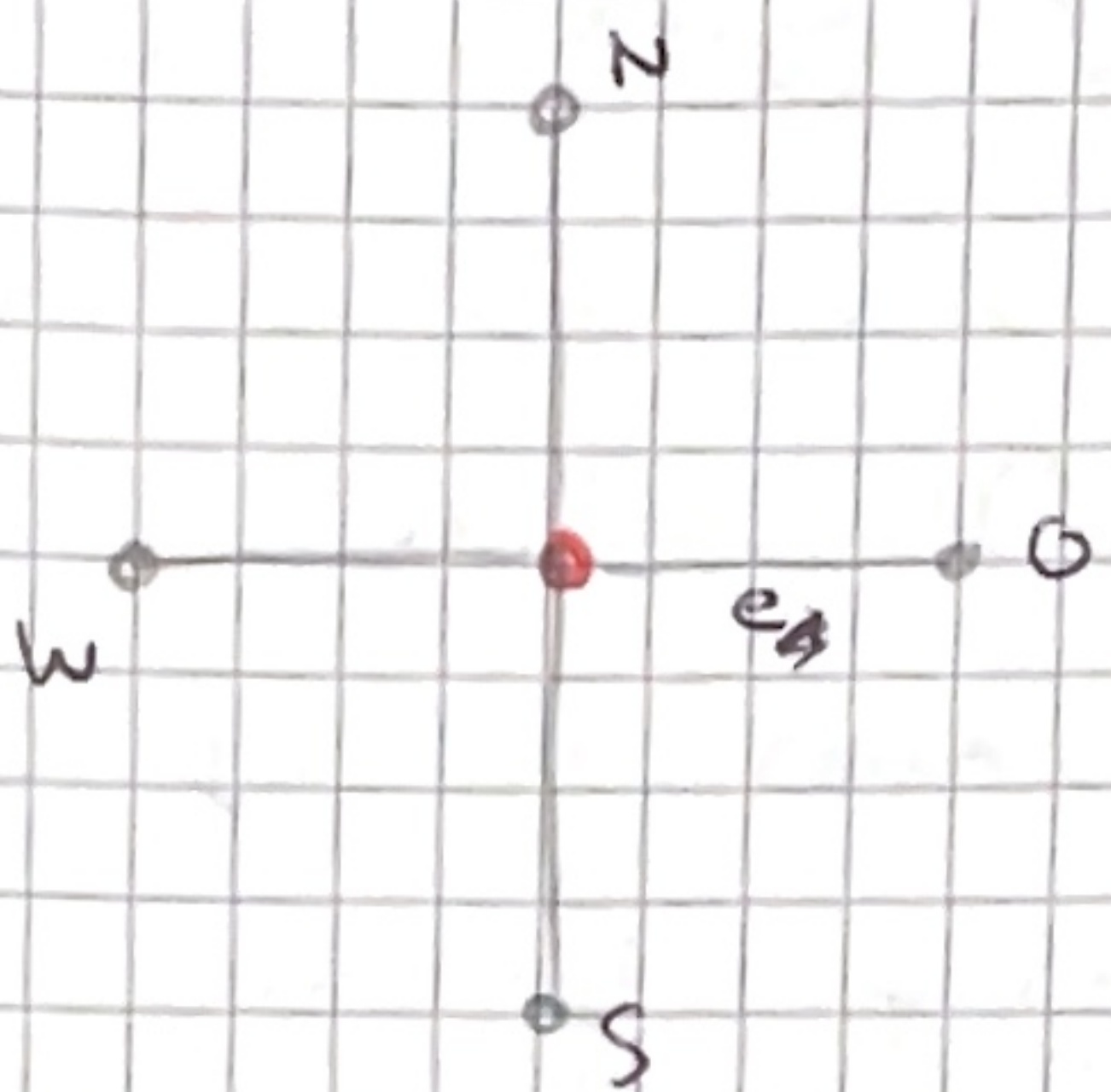
• a^3ba^{-3} gibt eine Rotation um N .

~~Wir können jedes Element $g \in G$ als Produkt der Rotationen a und b darstellen:~~

~~$g = a^{i_1} b^{j_1} a^{i_2} b^{j_2} \dots a^{i_n} b^{j_n}$, wobei $1 \leq i_k \leq 3$ und $1 \leq j_k \leq 2$, wobei i_k, j_k auch 0 sein dürfen.~~

~~Wir bezeichnen e_1 als die Kante zwischen dem Ursprung und Osten und e_2 als die Kante zwischen ...~~

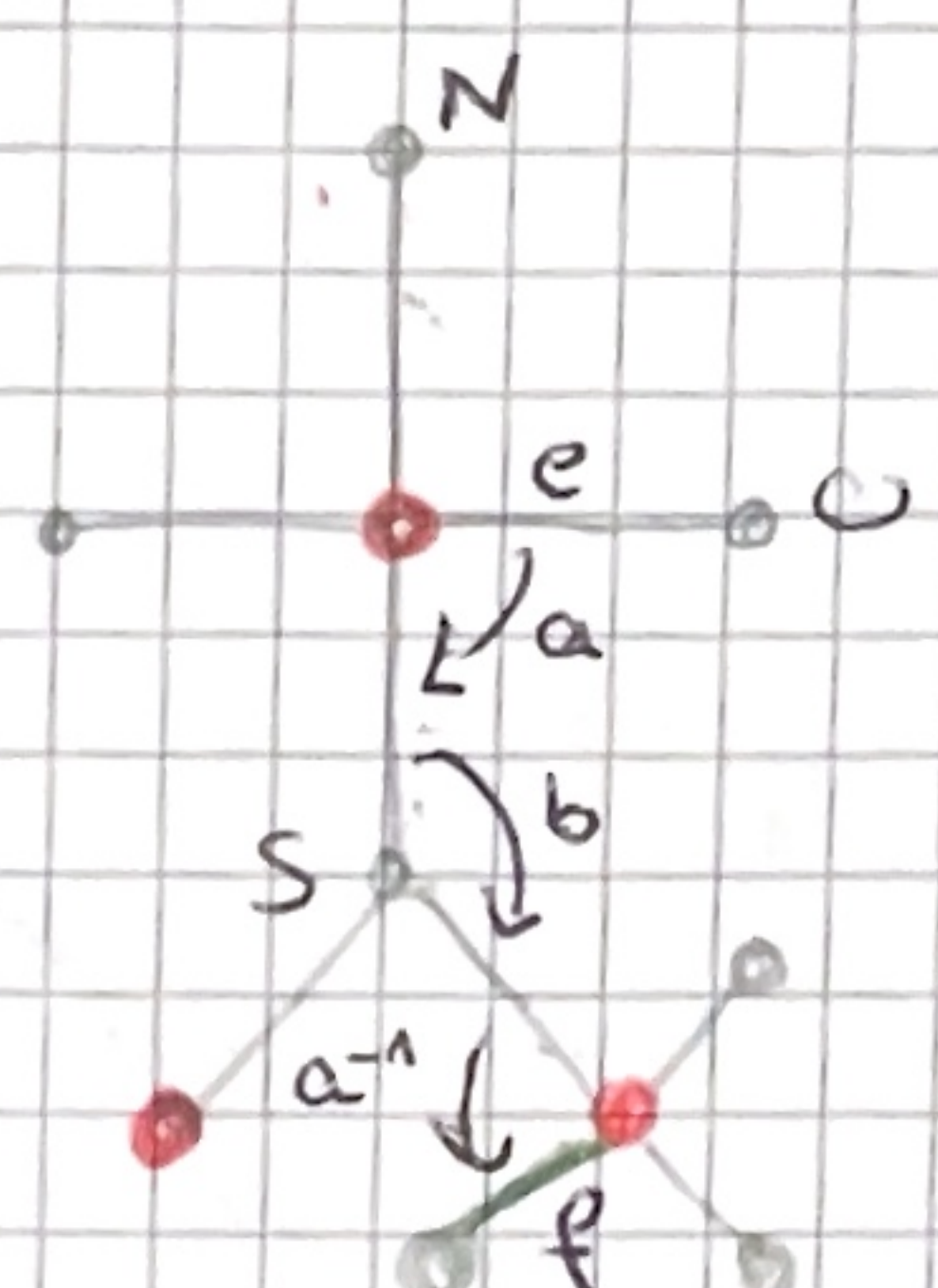
~~"Streckkante"~~



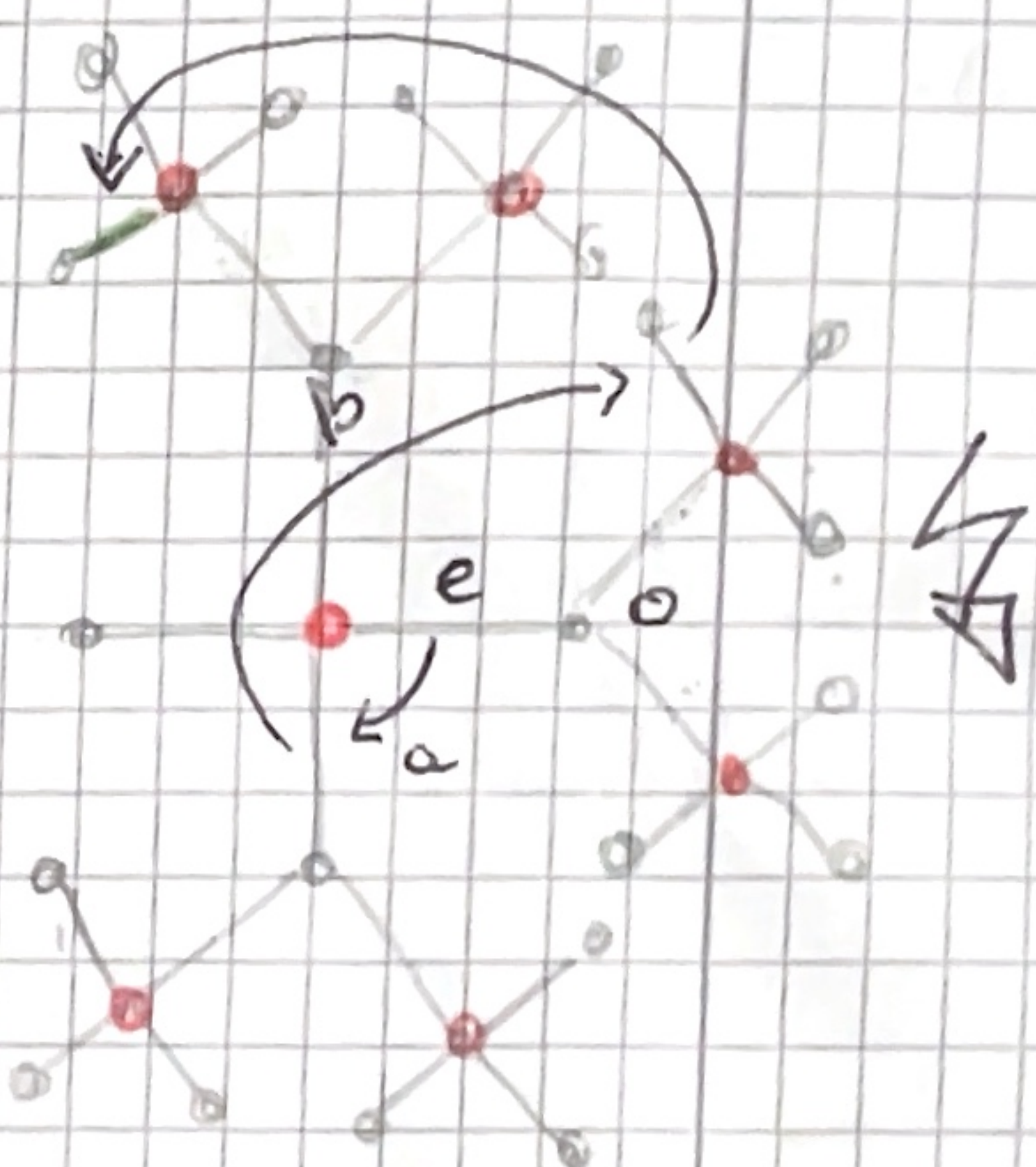
Bsp. falsche Rotation:

1. $aba^{-1} = f$

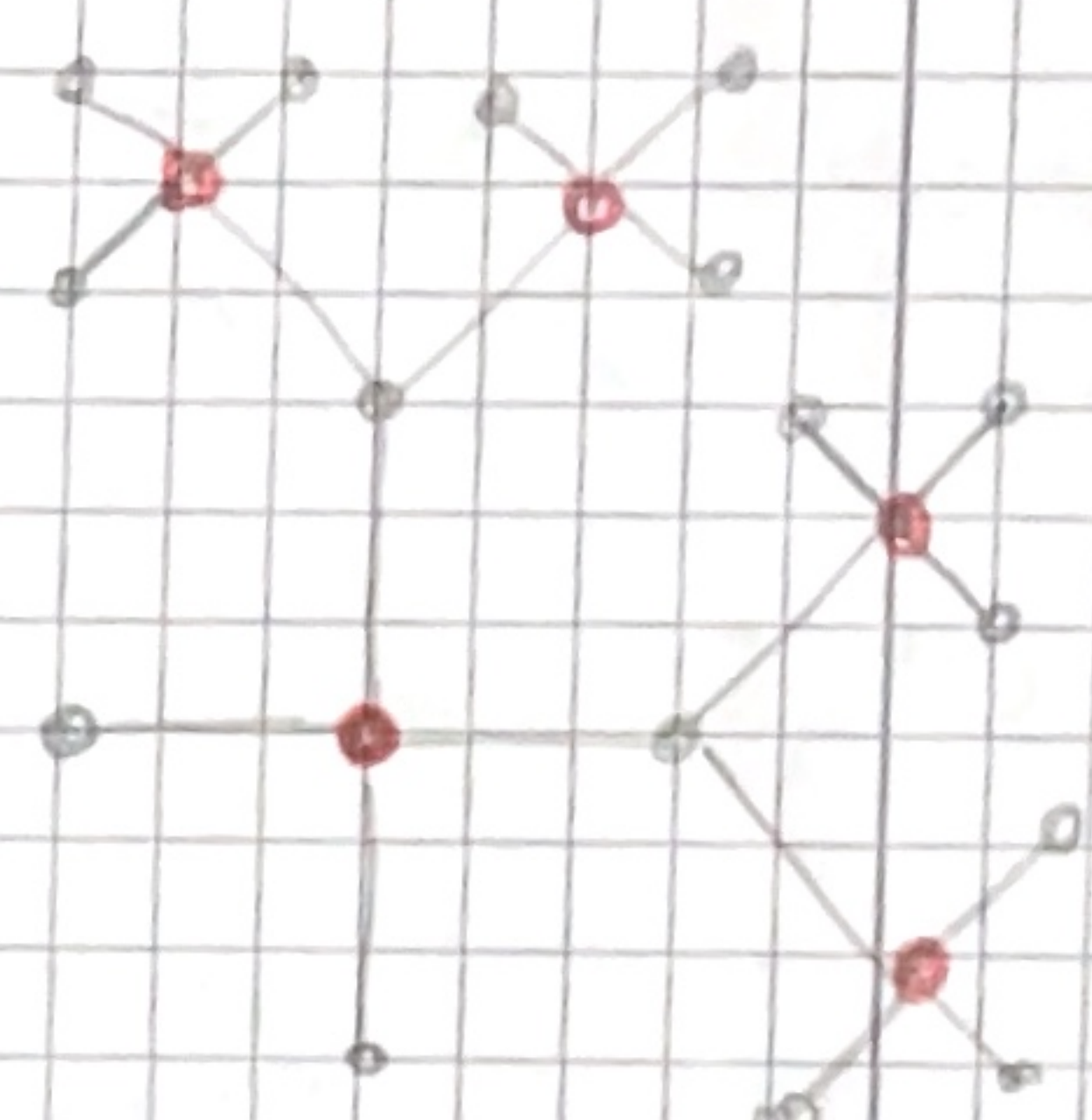
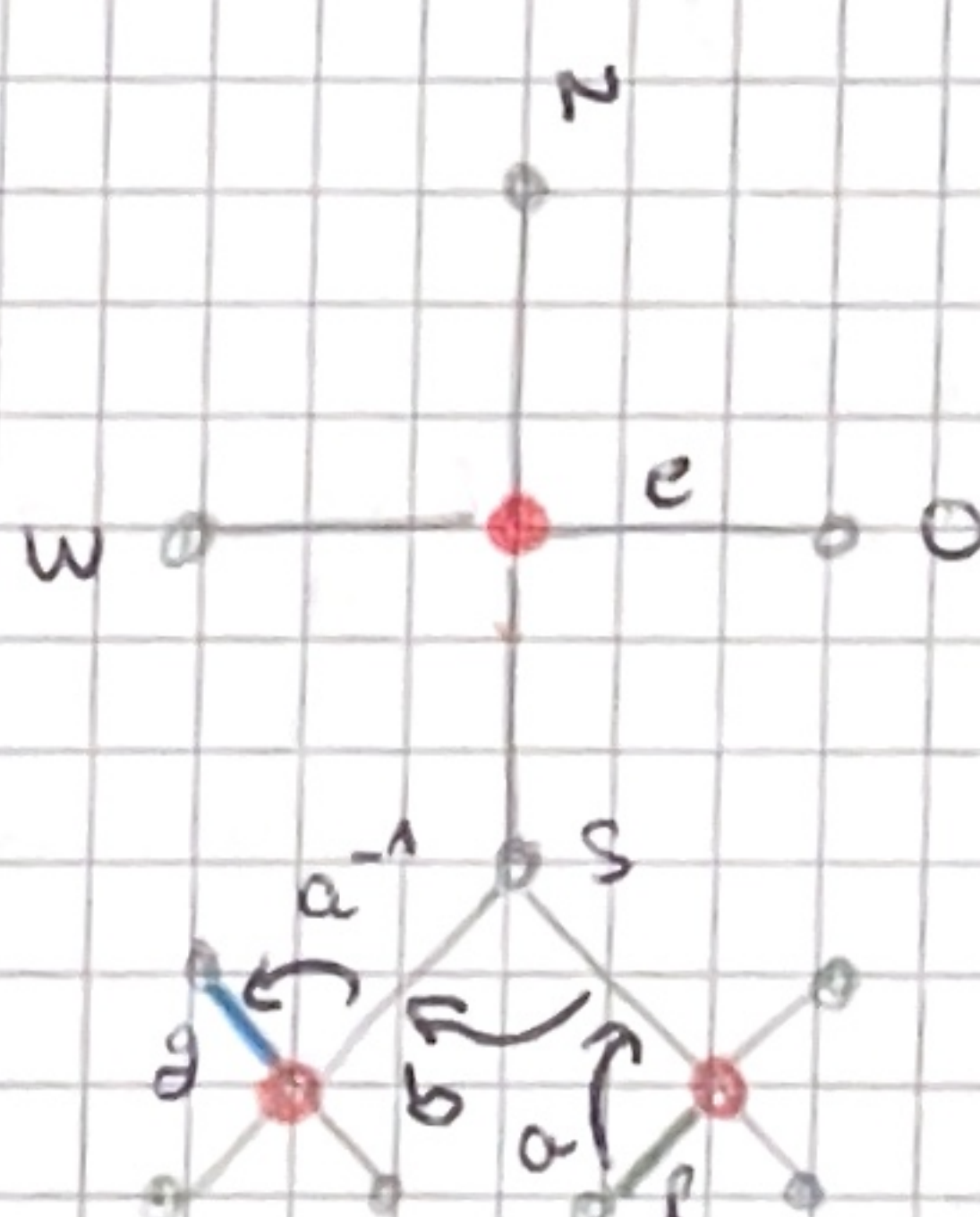
"two wrongs makes a right"



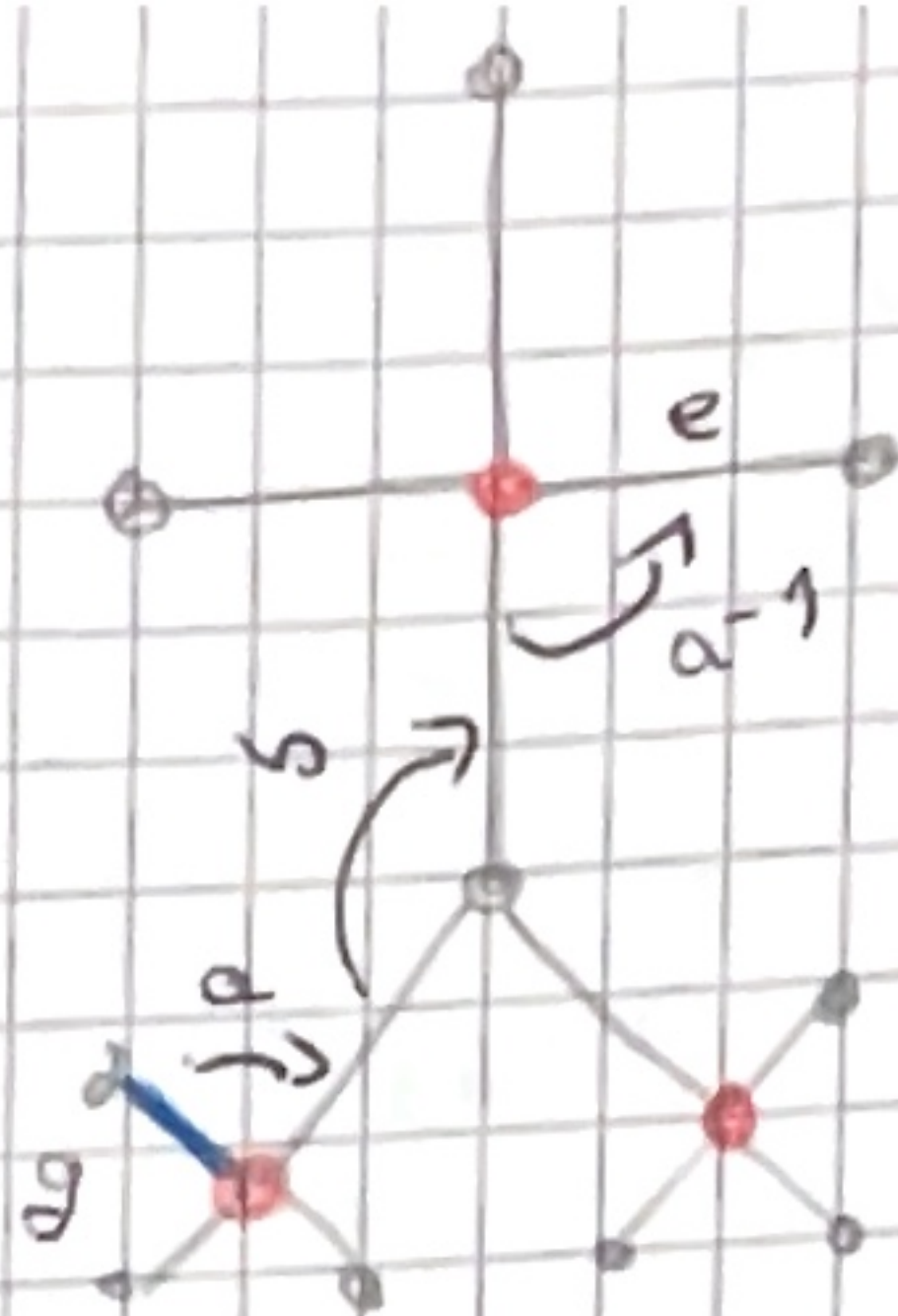
g von links nach rechts gelesen



2. $(aba^{-1})f = g$



3. $(aba^{-1})g :$
 $= e$



~~aba^{-1} ist eine Rotation um S~~
 Hier kann man zeigen: a^2ba^{-2} ist eine Rotation um W
 a^3ba^{-3} ist eine Rotation um a

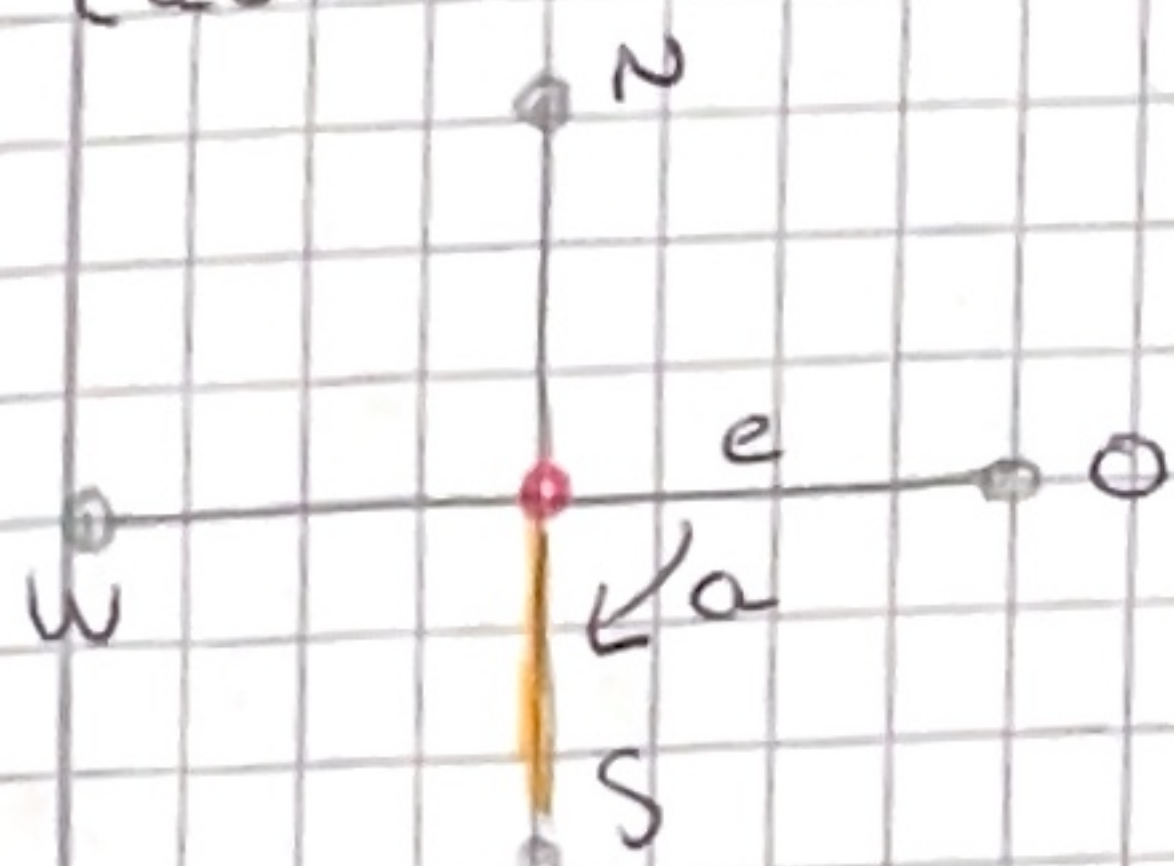
Warum liefert falsches Lesen hier die richtige Lösung?

$$w = aba^{-1} = (aba^{-1}b^{-1}a^{-1})(aba^{-1})a$$

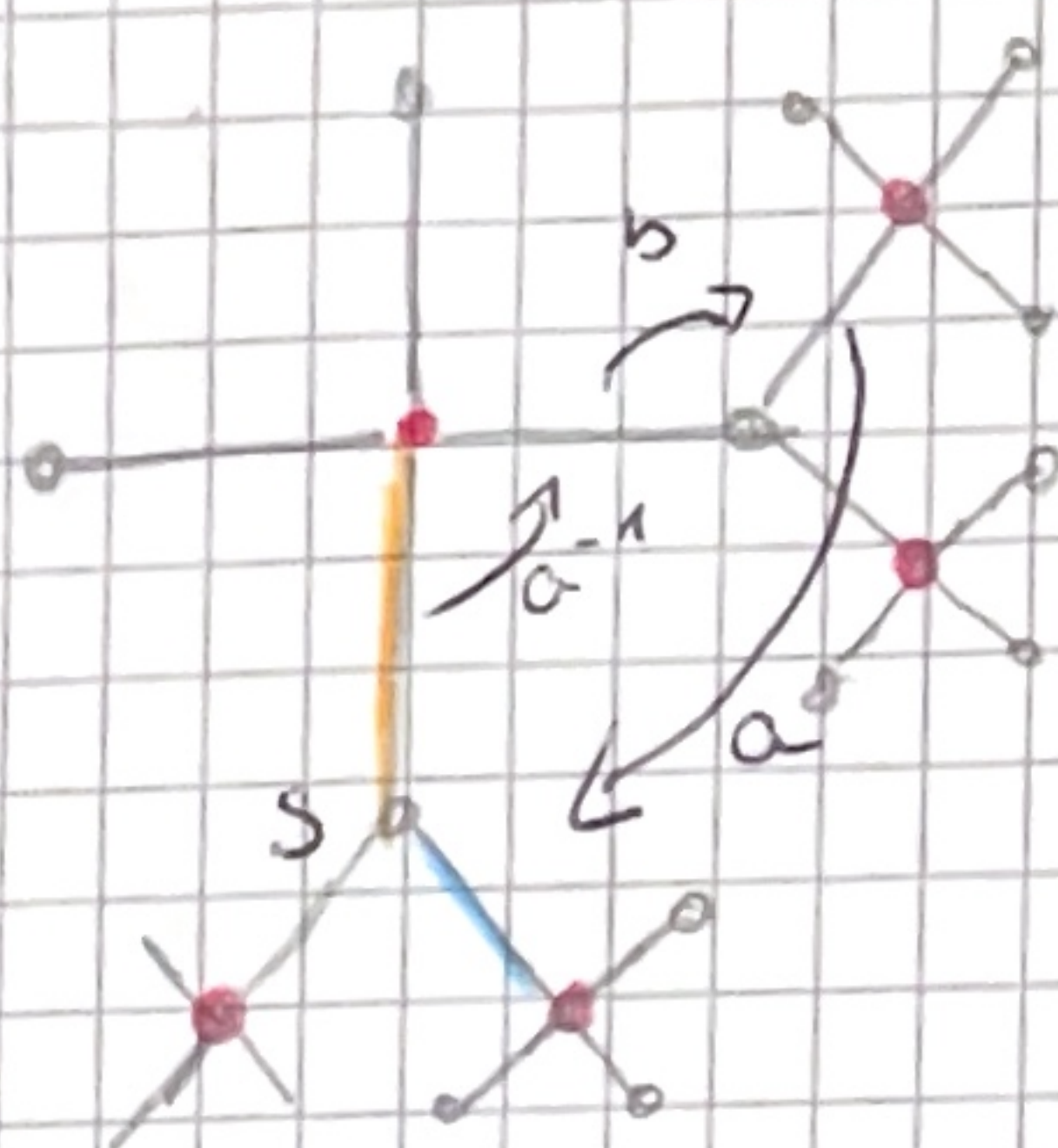
wobei aba^{-1} genau die Rotation um S ist und

$(aba^{-1}b^{-1}a^{-1})$ eine Rotation gegen den Uhrzeigersinn um SR:

a:

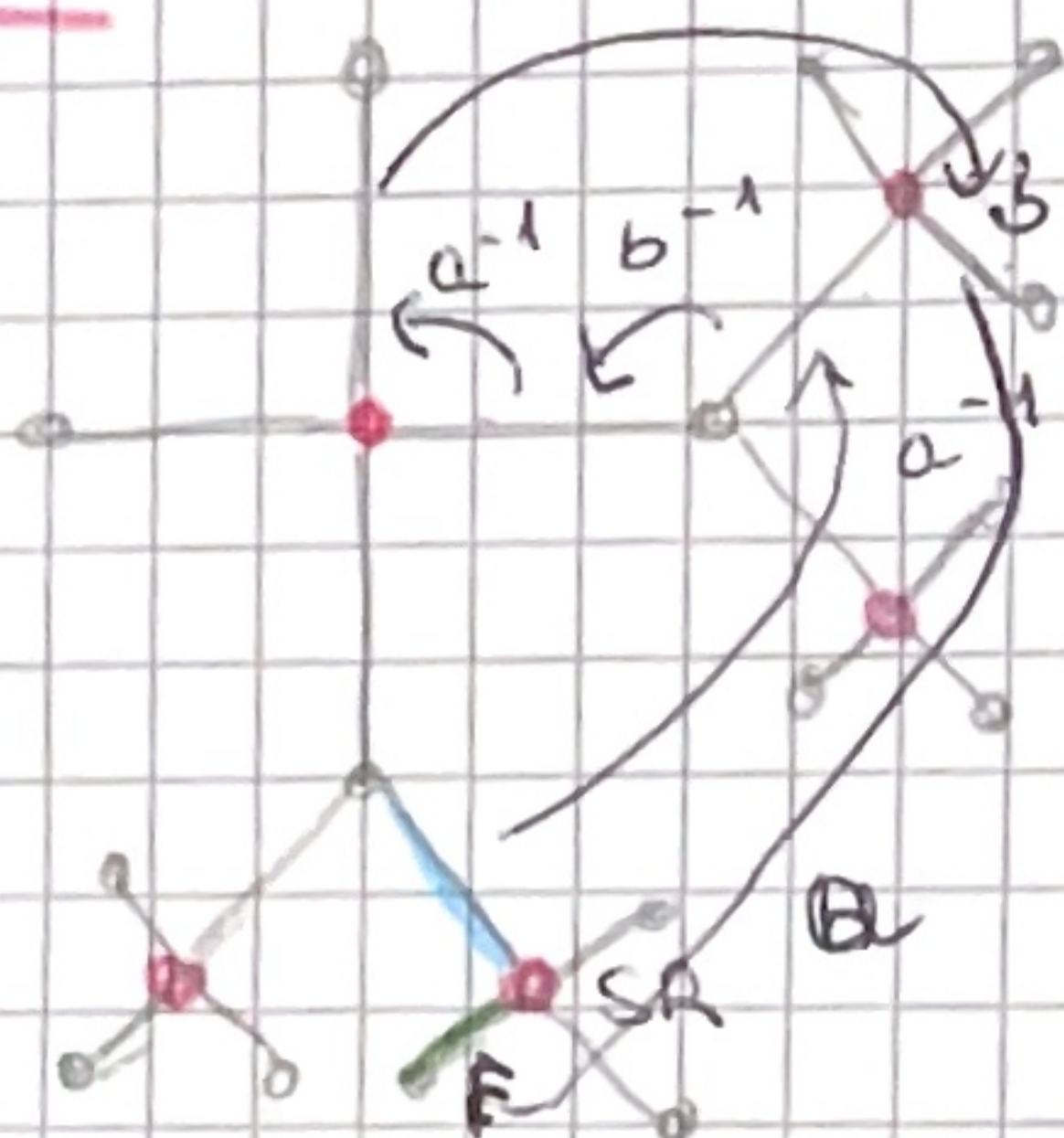


aba^{-1} :



$aba^{-1}b^{-1}a^{-1}$:

stehen lassen



(wollen ist dann
 $(aba^{-1}b^{-1}a^{-1})^{-1} = abab^{-1}a^{-1}$
 eine Rotation im Uhrzeigersinn
 um SR)



Spannende Beobachtung: Sei $a \in \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4$ eine Rotation um eine Ecke u .
Sei $g \in \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4$. Wirkt g so, dass wir zu einer Ecke v kommen
(v mit derselben Valenz wie u), dann liefert
 $g a^j g^{-1}$ eine Rotation um die Ecke v .

Bsp.:

1) b ist eine Rotation um O . a bringt uns zur Ecke S

$\Rightarrow aba^{-1}$ ist Rotation um S .

2) $g = aba^{-1}$ bringt uns zum Punkt SR , a ist eine Rotation um u

$\Rightarrow (aba^{-1})a(aba^{-1})^{-1} = abab^{-1}a^{-1}$ ist Rotation um SR



Induktiv können wir damit von der Kante e jede Kante auf dem Graphen erreichen

1. zuerst durch a^j, b^j jede Kante um u und O , dann
sämtliche Rotationen um

2. N, S, E, W

3. $NL, NR, OL, OR, SL, SR, WL, WR$

...

Definition Norm auf $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4$ Wir bezeichnen die Norm als Anzahl der Exponenten in einem Wort, die ungleich 0 ist.
Reduzierten

Bsp: $\|a^2 a^3 b a b\| = 6$

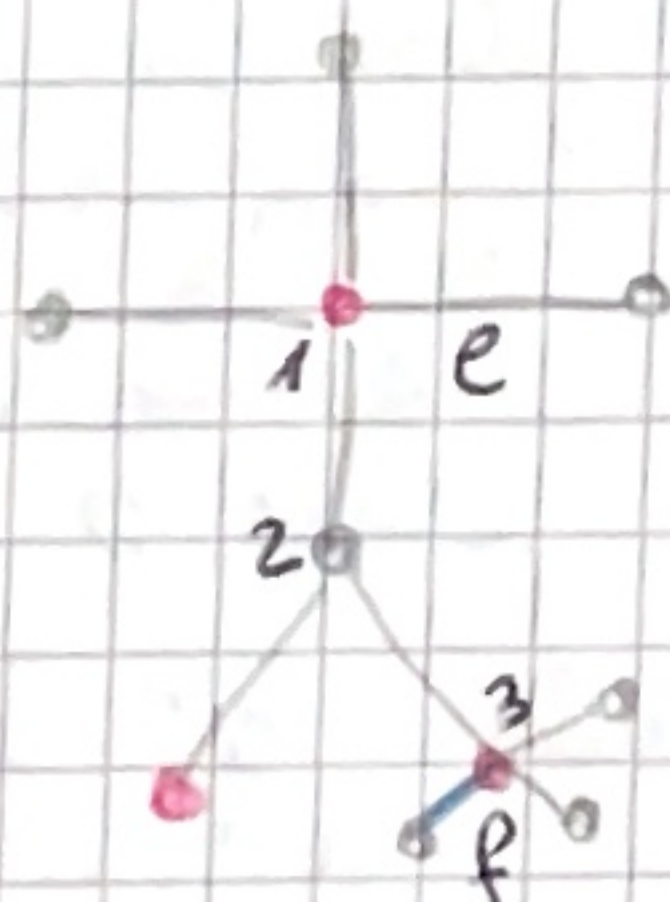
Lemma 1 Die Gruppe $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4$ wirkt transitiv auf die Kanten von $T_{3,4}$.

Sei e die Kante fixiert durch die Rotationen a und b und

$g = a^{i_1} b^{j_1} \dots a^{i_n} b^{j_n}$ mit $n = \|g\|$

Dann ist die Anzahl an Ecken zwischen e und $g \cdot e$ gerade n .

Bsp.: $aba^{-1} = f$
 $\|aba^{-1}\| = 3$



Beweis: Sei eine Kante f, f' gegeben.
Transitivität: Wir haben bereits gesehen, dass $g_f, g_{f'} \in \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4$ existieren, s.d.

$$\begin{aligned} g_f \cdot e &= f \text{ und } g_{f'} \cdot e = f' \\ \Rightarrow g_f g_{f'}^{-1} f' &= g_f (g_{f'}^{-1} f') = g_f e = f \\ \Rightarrow g_f g_{f'}^{-1} &\text{ schickt } f' \text{ auf } f \\ \Rightarrow \text{Gruppenwirkung ist Kanten transitiv.} \end{aligned}$$

Die Aussage über die Ecken zwischen e und ge folgt aus der Def. des Wortes g über die Rotationen:

Jede Rotation a^i, b^j mit $i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2, 3\}$ rotiert eine Kante um einen Punkt, s.d.
 $a^i f \neq f, b^j f \neq f$, d.h. eine weitere Ecke kommt hinzu.

Lemma 2

Definition freie Wirkung: $G \xrightarrow{\text{frei}} X$ wenn für alle $g \in G \setminus \{1\}$ und $x \in X$ ist $gx \neq x$

(Definition Stabilisation: $\{g \in G \mid gx = x\}$)

Lemma 3

Definition scharf transitiv Eine Gruppe wirkt scharf transitiv, falls die Wirkung frei und transitiv ist.

Lemma 2 Die Gruppenwirkung auf $T_{3,4}$ ist scharf transitiv auf den Kanten.
 Jedes Wort $g \in \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4$ kann eindeutig dargestellt werden als

$$g = a^{i_1} b^{j_1} \dots a^{i_n} b^{j_n}, \text{ wobei } i_1 \text{ und } j_n \neq 0$$

sein könnten, ansonsten $1 \leq i_s \leq 3, 1 \leq j_s \leq 2$.

Beweis: In Lemma 1 haben wir bereits gezeigt, dass die Wirkung transitiv ist.

Da $T_{3,4}$ keine Zyklen hat, jedes x auf $T_{3,4}$ also eindeutig bestimmt ist, reicht es zu zeigen, dass es kein $g \in \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4$ gibt mit
 $g = a^{i_1} b^{j_1} \dots a^{i_n} b^{j_n} = a^{k_1} b^{k_2} \dots a^{k_m} b^{k_m}$

Angenommen es gäbe so ein Element g . Dann gilt
 $a^{i_1} b^{j_1} \dots a^{i_n} b^{j_n} b^{-k_m} \dots b^{-k_1} a^{-k_m} = e$
 und mit Lemma 1 folgt, dass die Norm von diesem Wort gerade 0 ist.

Das geht nur, falls
 $b^{j_n} \cdot b^{-k_m} = e \Rightarrow j_n = k_m = 0$
 und weiterhin $a^{i_n} \cdot a^{k_m} = e \Rightarrow i_n = k_m = 0$
 ... usw.

$\rightarrow$ ~~alle~~ ~~repräsentant~~ alle Indizes sind gleich $\Leftrightarrow$
 $\Rightarrow \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4$ wirkt frei auf $\mathbb{Z}_{3,4} \Rightarrow \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4$ ist scharf transitiv

Beweisidee für Theorem 2

- Gehe mit jedem freien Produkt von Gruppen $A * B$ so vor wie in $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_4$
 wähle Punkt $a \in A$ und $b \in B$

