Gliederung

1 Definition (virtuell)

P Eigenschaft (von Gruppen), Gruppe G heißt <u>virtuell P</u>, falls $H \le G$ mit H P und $[G:H] < \infty$.

$$\begin{array}{c} G \\ \mid {<\infty} \\ H \\ \mid P \\ 1 \end{array}$$

2 Bsple

- Endl. Gruppen sind <u>virtuell endl</u> (z.B. $H=1$ oder $H=G$)
  Ist G P, so auch G virtuell P.
- $D_\infty = \langle a, b \mid b^2 = 1, bab = 1 \rangle$ <u>virtuell zyklisch</u> mit $\mathbb{Z} \cong \langle a \rangle \le D_\infty$, $[D_\infty : \langle a \rangle] = 2$
- $\mathbb{F}_2$ ist <u>virtuell frei vom Rang 3</u> (V 3) (V 5)

3 Satz (Ziel)

Sind A, B endl Gruppen, so ist das freie Produkt $A * B$ virtuell frei.

Motivation: $\varphi : A * B \to A \oplus B$
$H = \mathrm{Kern}(\varphi)$
$\Rightarrow [A * B : H] = |A \oplus B| < \infty$.

$$1 \underset{\text{frei}}{\longrightarrow} H \underset{\text{endl}}{\overset{A \oplus B}{\longrightarrow}} A * B$$

4 Satz (universelle Eigenschaft des freien Produkts)

Für Homom $\varphi_A : A \to G$, $\varphi_B : B \to G$ ex (genau) ein $\varphi : A * B \to G$ mit $\varphi_A = \iota_A \varphi$, $\varphi_B = \iota_B \varphi$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[dr, "\varphi_A"'] & A * B \arrow[d, "\exists! \varphi"] & B \arrow[l, "\iota_B"'] \arrow[dl, "\varphi_B"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

5 Proposition

Sei $\varphi : A * B \to A \oplus B$ mit $\kappa_A = \iota_A \varphi$, $\kappa_B = \iota_B \varphi$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[dr, "\kappa_A"'] & A * B \arrow[d, "\exists! \varphi"] & B \arrow[l, "\iota_B"'] \arrow[dl, "\kappa_B"] \\ & A \oplus B & \end{tikzcd}$$

Dann ist $\mathrm{Kern}(\varphi)$ <u>frei über</u> $S = \{[a,b] \mid a \in A \setminus \{1_A\}, b \in B \setminus \{1_B\}\}$.

$\boxed{30\text{min}}$

Bem: $(a^{-1} b^{-1} a b)\varphi = (a^{-1} a, b^{-1} b) = (1_A, 1_B) = 1$.
$\Rightarrow \langle S \rangle \le \mathrm{Kern}(\varphi)$.

6 Lemma $K = \langle S \rangle \Rightarrow K \trianglelefteq A * B$.

[Bew.: $[a,b]^{\alpha} = \alpha^{-1}a^{-1}b^{-1}ab\alpha = \alpha^{-1}a^{-1}b^{-1}a\alpha b\, b^{-1}\alpha^{-1}b\alpha$

$= [a\alpha, b][\alpha, b]^{-1} \in K$.

+ Induktion □]

7 Lemma $\mathrm{Kern}(\varphi) = K$.

[Bew: Zz. $A*B/K \cong A \oplus B$.

(1) $\bar{A} = A/K$, $\bar{B} = B/K$

$\bar{A} \cdot \bar{B} = A*B/K$: $ba = ab[\cancel{b}a, b]^{-1}$

(2) $\bar{A} \cap \bar{B} = 1$

(3) $\bar{A} \cong A$, $\bar{B} \cong B$.]

8 Lemma K frei über S.

Bew: Induktion über Länge in $\{S, S^{-1}\}^*$:

$w = [a_1, b_1]^{\varepsilon_1} \cdots [a_n, b_n]^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_i = \pm 1$ red in $\{S, S^{-1}\}^*$

(*) $\rho(w)$ red der Länge $\geq n+3$ in $A*B$ und $\rho(w)$ endet auf $\begin{cases} a_n b_n, & \varepsilon_n = 1 \\ b_n a_n, & \varepsilon_n = -1. \end{cases}$

IA: $w = [a_1, b_1]^{\varepsilon_1}$ ✓

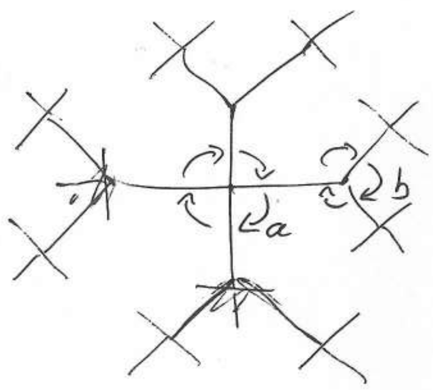
⋮

9 Korollar Sind A, B endlich, so ~~bitte~~ enthält $A*B$ einen Normalteiler vom Index $|A|\cdot|B|$, der frei vom Rang $(|A|-1)(|B|-1)$ ist, also ist $A*B$ virtuell frei.

Bew: φ wie oben ergibt $[A*B : \mathrm{Kern}(\varphi)] = |A|\cdot|B|$, $|S| = (|A|-1)(|B|-1)$ per def. □

$\boxed{60\,\text{min}}$

~~IG Roop~~
Betrachte $\mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_3 = \langle a, b \mid a^4 = b^3 = 1 \rangle$; wirkt auf $J_{4,3}$:



10 Proposition

Sei $\varphi: \mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$ kanonisch, dann ist Kern(φ) frei über
$S = \{[a,b] \mid a \in \mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, b \in \mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}\}$.

Für Einschränkung Kern$(\varphi) \curvearrowright J_{4,3}$ gilt

11 Lemma Kern(φ) wirkt frei auf $J_{4,3}$.

Bew: – Für $e \in E(J_{4,3})$ ist Stab$(e) = \{1\}$.

– Für $v \in V(J_{4,3})$ ist Stab(v) konjugiert zu $\mathbb{Z}_4$ bzw. $\mathbb{Z}_3$ in $\mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_3$.

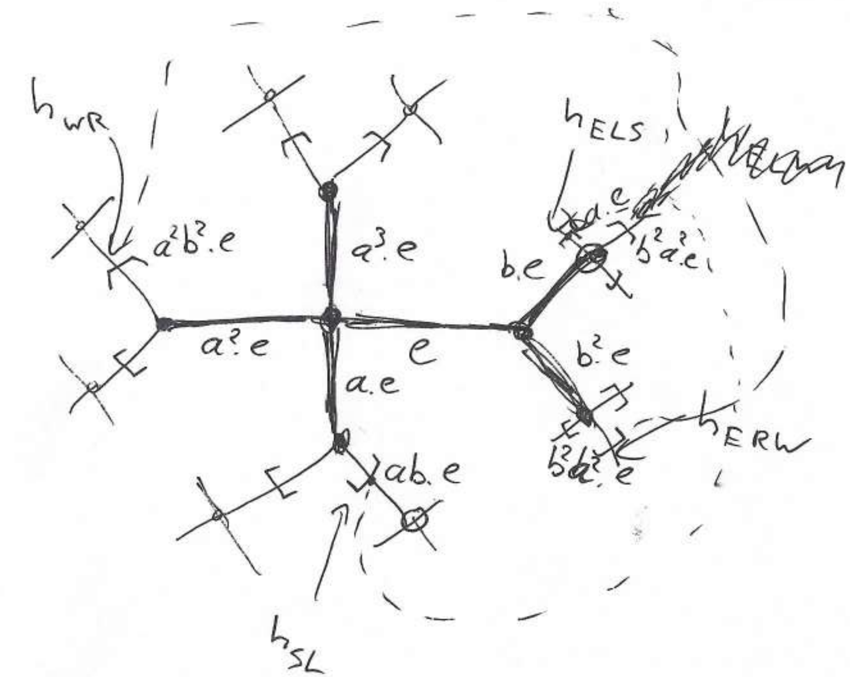
$\varphi(g \cdot a^i \cdot g^{-1}) = (a_g \cdot a^i \cdot a_g^{-1}, 0) \neq (0,0)$ $(i \neq 0)$.
$(a_g + i - a_g, 0)$ $(\varphi(g) = (a_g, b_g))$

$\Rightarrow$ nur $(0,0)$ in Kern(φ) und in Stab(v). □

Aus Charakterisierung freier Gruppen folgt

12 Korollar Ken(φ) ist frei.

Graphische Darstellung von Ken$(\varphi) \curvearrowright J_{4,3}$:
KERN und Fundamentalbereich:



Alle Knoten in KERN liegen in $a^i.e$ oder $b^i.e$
Knoten darüberhinaus sind identifiziert
Identifizierung durch Kommutatoren:
$[a,b] \in$ Kern$(\varphi) \Rightarrow ab.e \sim ba.e \Rightarrow h_{SL} \sim h_{ELS}$
$[a^2,b^2] \in$ Kern$(\varphi) \Rightarrow a^2b^2.e \sim b^2a^2.e \Rightarrow h_{WR} \sim h_{ERW}$
⋮

Die $a^i \cdot e$, $b^i \cdot e$ liegen im KERN.

Alle anderen $g \cdot e$ $(\|g\|=2)$ sind identifiziert.

Alle „Ender" des Fundamentalbereichs sind identifiziert.

$\Rightarrow \text{Kern}(\varphi) = \langle S \rangle$.