

Die Serre's Eigenschaft FA

Nicos Edward Kroustouris

28. Mai 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Endliche Gruppen wirken auf Bäumen	2
2	Serre's Eigenschaft FA und unendliche Gruppen	7
3	Die Gruppe $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ der freien Gruppe $\mathbb{F}_n$	10
4	Charakterisierung von FA für abzählbare Gruppen	14

Ziel unseres Vortrags

Wir führen zunächst die Serre's Eigenschaft FA ein. Dann diskutieren wir, wieso endliche Gruppen diese Eigenschaft überhaupt haben. Als Nächstes diskutieren wir wieso die Automorphismengruppe der freien Gruppe $\mathbb{F}_n$ für $n \geq 3$ FA hat. Damit können wir folgern, dass für $n \geq 3$, dies auch für $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ geht. Zuletzt geben wir einen Ausblick, dass es eine Charakterisierung von der Eigenschaft FA für abzählbare Gruppen gibt und beweisen dann, dass die Eigenschaft für $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ nicht erfüllt ist.

1 Endliche Gruppen wirken auf Bäumen

Motivation: Bevor wir mit dem Seminar beginnen, stellen wir uns zunächst die Frage: Was ist die Abkürzung FA eigentlich? F kommt aus dem Englischen und heißt "fixed" und A kommt aus dem Französischen und heißt "Arbre", auf deutsch "Baum". Also beschäftigen wir uns in diesem Seminar über fixe Bäume. Auf deutsch gesagt: Die Serre's Eigenschaft der Fixbäume. Ziel unseres ersten Kapitels ist es zu zeigen, dass jede endliche Gruppe diese Eigenschaft hat. Dazu führen wir zunächst folgende Definitionen ein:

(1.1) **Definition (Bahn).** Sei $v \in \mathcal{T}$ jeder Knoten von $\mathcal{T}$ und sei die Bahn von v die Gruppenwirkung unter G , dann gilt

$$\mathcal{O}(v) = \{g \cdot v \mid g \in G\}$$

(1.2) **Definition (Serre's Eigenschaft FA).** Sei G eine Gruppe. Dann sagen wir, dass G die Serre's Eigenschaft FA hat, falls für jeden Baum $\mathcal{T}$ mit der Gruppenwirkung $\mathcal{T} \curvearrowright G$ gilt, dass ein $v \in \mathcal{T}$ existiert mit

$$\text{Stab}(v) = G.$$

(1.3) **Theorem.** Jede endliche Gruppe erfüllt die Serre's Eigenschaft FA.

Beweis. Sei G eine endliche Gruppe und sei $\mathcal{T} \curvearrowright G$ die Gruppenwirkung von G auf $\mathcal{T}$. Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$ der Teilbaum, welcher sich durch die Vereinigung aller Knoten und Kanten von $\mathcal{T}$ entsteht, die im kürzesten Pfad zwischen Elementen von $\mathcal{O}(v)$ auftreten wobei $v \in \mathcal{T}$ ein Punkt in $\mathcal{T}$ ist. Da außerdem $g \cdot \mathcal{O}(v) = \mathcal{O}(v)$, für jedes $g \in G$, folgt, dass G auf $\mathcal{T}_{\mathcal{O}(v)}$ wirkt. Wir definieren nun $\mathcal{T}_{\mathcal{O}(v)}^{(1)}$, als den Baum durch das Entfernen der Blätter, also Knoten mit nur einer einzigen Kante und wir definieren $\mathcal{T}_{\mathcal{O}(v)}^{(n)}$, als den Baum, welcher sich nicht weiter in Teilbäume zerlegen lässt.

Fall 1: $\mathcal{T}_{\mathcal{O}(v)}^{(n)}$ ist schon erreicht

Es gilt stets, dass wir unseren Fixpunkt erreicht haben also $\text{Stab}(v) = G$.

Fall 2: $\mathcal{T}_{\mathcal{O}(v)}^{(n)}$ ist noch nicht erreicht

$\mathcal{O}(v)$ enthält Knoten mit Valenz 1. Die Gruppenwirkung $\mathcal{O}(v) \curvearrowright G$ muss diese Blätter Permutieren, so auch alle nicht-Blätter-Knoten. Sei nun $\mathcal{T}_{\mathcal{O}(v)}^{(1)}$ der Baum durch das Entfernen der Blätter. Somit können wir diesen Prozess immer weiter durchführen solange es Knoten mit Valenz 1 gibt. Wir erkennen auch, dass die Teilbäume $\mathcal{T}_{\mathcal{O}(v)}^{(n-1)}$ alle dann weiterhin auf G wirken. Da wir endliche Gruppen G vorausgesetzt haben sind alle Teilbäume $\mathcal{T}_{\mathcal{O}(v)}^{(n-1)}$ endlich so auch der letzte Teilbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{O}(v)}^{(n)}$. Und da dieser letzte Teilbaum sich nicht weiter in Teilbäume konstruieren lässt gibt es keinen Knoten mit Valenz 1 und es gilt Fall 1. □

(1.4) **Beispiele.**

(1) Sei $G = \text{Id}$ mit $\mathcal{T} \curvearrowright G$. Wenn wir einen Punkt $v \in \mathcal{T}$ wählen, dann enthält die Bahn nur diesen einen gewählten Punkt.

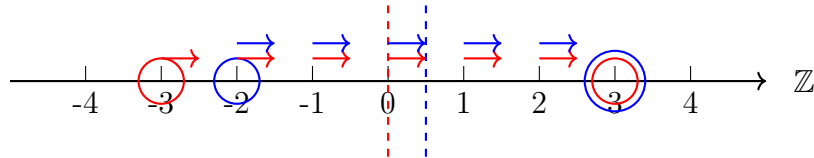


Also haben wir stets diesen Fixpunkt gefunden und es gilt

$$\text{Stab}(v) = \text{Id} = G$$

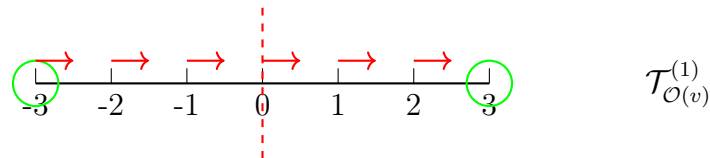
Also hat G die Eigenschaft FA.

- (2) Sei $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Wir betrachten $\mathcal{T} \curvearrowright G$, wir wählen $v = 0$ (rote gestrichelte Linie) und $v = 1/2$ (blaue gestrichelte Linie), da wir gerade mit Spiegelungen auf $\mathbb{Z}$ wirken z.B. wir spiegeln bei $v = 0$, dann liegen -3 und 3 auf der gleichen Bahn und wenn wir bei $v = 1/2$ spiegeln, dann liegen -2 und 3 auf der gleichen Bahn. Also erhalten wir folgendes Bild:

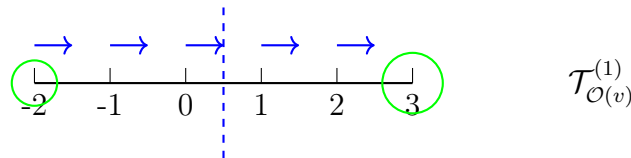


Nun können wir, wie im Beweis Theorem 1.3, Teilbäume konstruieren. Also erhalten wir folgende Bäume:

Fall 1:

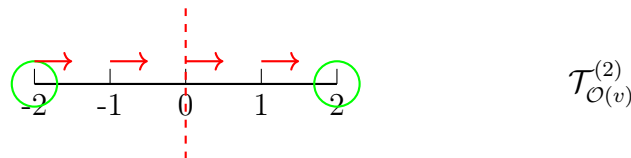


Fall 2:

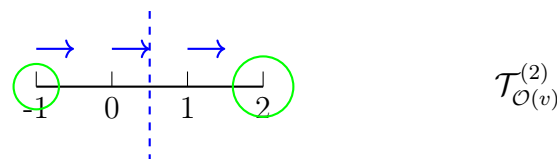


Nun können wir durch entfernen der Blätter, also Knoten mit nur einer einzigen Kante zu einen neuen Teilbaum konstruieren. Somit erhalten wir folgende Teilbäume:

Fall 1:



Fall 2:



Diesen Prozess führen wir jetzt solange durch, bis wir wie in dem Beweis keine weiteren Teilbäume konstruieren können. Somit erhalten wir folgende Teilbäume:

Fall 1:

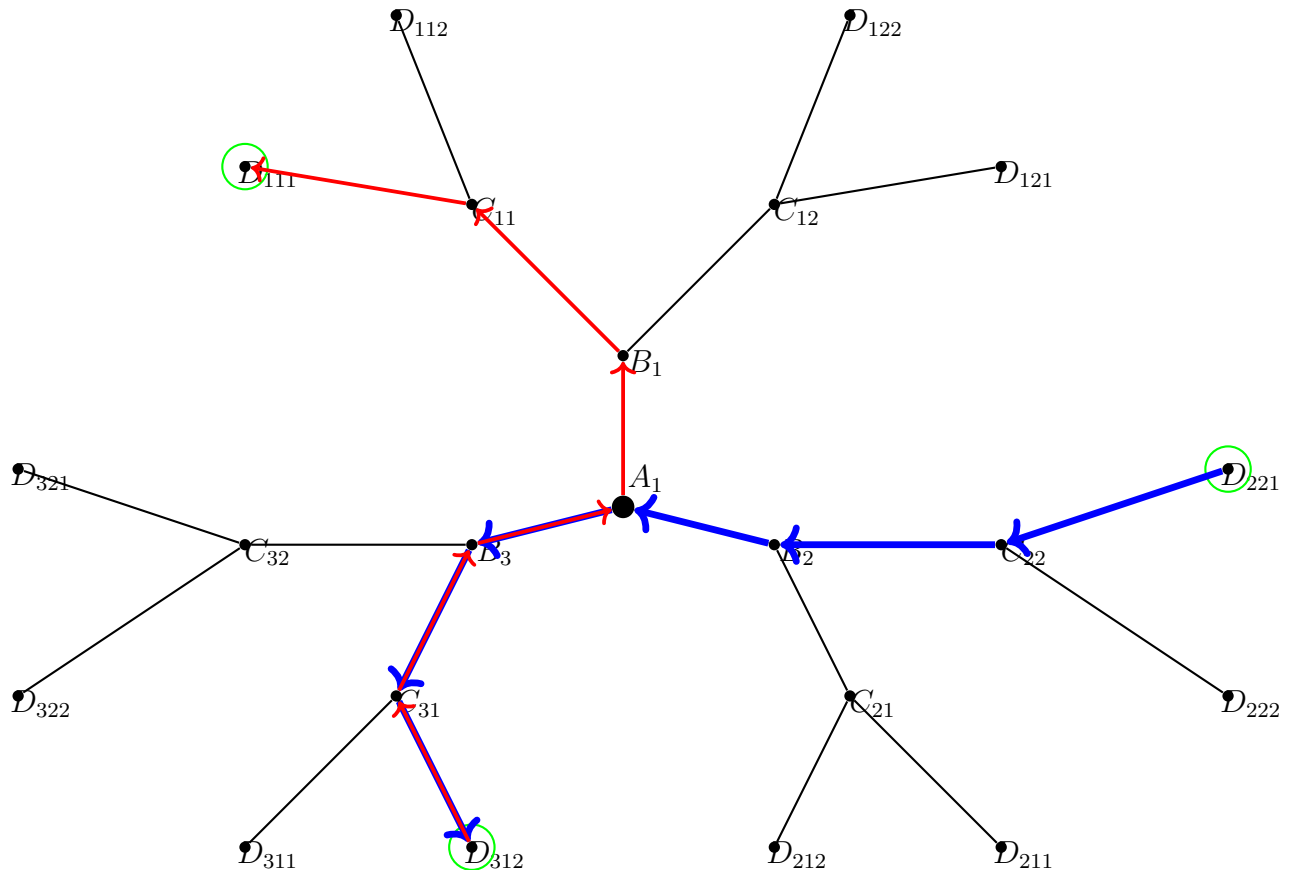


Fall 2:

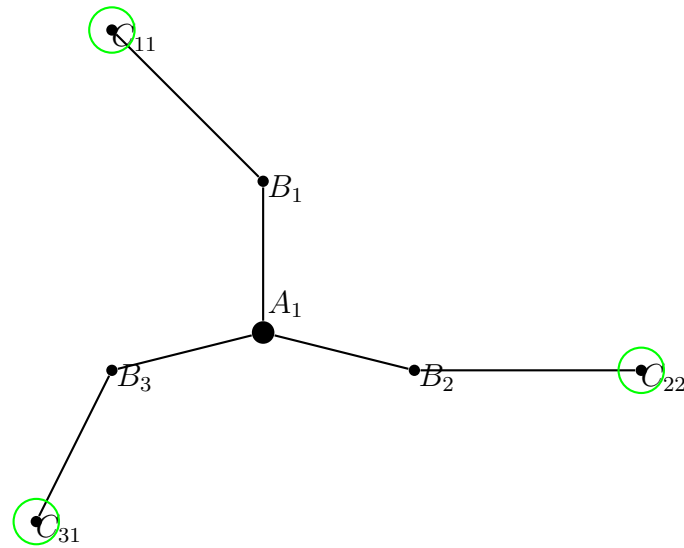


Also erhalten wir im ersten Fall dann $\text{Stab}(0) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = G$ und im zweiten Fall $\text{Stab}(\frac{1}{2}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = G$. Also hat G sowohl im ersten also auch im zweiten Fall die Eigenschaft FA.

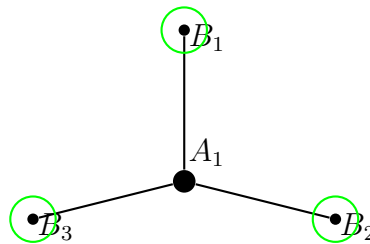
(3) Sei $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Wir betrachten $\mathcal{T} \curvearrowright G$, also die Wirkung durch Rotation um einen Knoten in einem 3-Valenten Baum. Wählen wir $v \in \mathcal{T}$ als den Ursprungspunkt in der Mitte des Baumes dann gilt stets $\text{Stab}(v) = G$. Wählen wir $v \in \mathcal{T}$ nicht als den Ursprungspunkt, dann existieren durch Rotation zwei weitere Punkte die auf der Gleichen Bahn liegen. Dann existiert ein kürzester Pfad zwischen den drei Punkten die auf der gleichen Bahn liegen. Nun führen wir den Prozess aus Theorem 1.3 durch und erhalten $\text{Stab}(v) = G$ also hat die Gruppe G FA. Dies kann man sehr gut sehen wenn wir den Punkt $v = D_{221}$ wählen:



Nun können wir wieder durch das Entfernen der Blätter einen Teilbaum konstruieren, also erhalten wir $\mathcal{T}_{\mathcal{O}(v)}^{(1)}$



Wir führen den Prozess weiter durch. Wir erhalten den Teilbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{O}(v)}^{(2)}$.



Nun führen wir den Prozess noch ein einziges Mal durch und erhalten somit den Teilbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{O}(v)}^{(3)}$, welcher sich nicht weiter in Teilbäume zerlegen lässt



Also haben wir einen Fixpunkt $v' = A_1$ gefunden, womit wir folgern können, dass

$$\text{Stab}(v') = \text{Stab}(A_1) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = G.$$

Also hat G Eigenschaft FA.

- (4) Die Gruppen $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{Z}$, D_∞ haben keinen Fixpunkt $v \in \mathcal{T}$, also gilt $\text{Stab}(v) = \text{Id}$, somit haben die Gruppen $\mathbb{Z}$ und D_∞ nicht diese Eigenschaft.

(1.5) Korollar. Sei $\mathcal{T}$ ein bipartierter Baum und sei G eine endliche Gruppe eingebettet in $\text{Sym}^+(\mathcal{T})$ dann gilt: G fixiert einen Punkt.

Beweis. Da die Gruppe G endlich ist, gilt nach Theorem 1.3, dass G die Eigenschaft FA hat. Somit gilt, dass in G stets ein Fixpunkt fixiert. $\square$

(1.6) Korollar (Virtuell freie Gruppen von I. Griesbach (Korollar 3.30)). Die der Knoten des Baums die einem freien Produkt $A * B$ zugeordnet sind, sind Konjugate von A und B .

(1.7) Korollar. *Sei H eine endliche Untergruppe von $A * B$, dann ist H konjugiert zu einer Untergruppe von A oder B .*

Beweis. Nach Korollar 1.6 sind die der Knoten des Baums, die einem freien Produkt $A * B$ zugeordnet sind Konjugate von A und B . Nach Korollar 1.5 existiert eine endliche Untergruppe H von $A * B$, welches einen Knoten fixiert. Somit gilt

$$H \leq A^g = g^{-1}Ag \quad \text{oder} \quad H \leq B^g = g^{-1}Bg$$

für ein $g \in A * B$. Also folgt, dass H konjugiert zu einer Untergruppe von A oder B ist. $\square$

2 Serre's Eigenschaft FA und unendliche Gruppen

Motivation: Wie im letzten Kapitel diskutiert, haben die ∞ -Gruppen $\mathbb{Z}, D_\infty$ mit der Gruppenwirkung

$$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{Z}, D_\infty$$

keinen Fixpunkt, also besitzen diese Gruppen kein FA. Wir haben im letzten Kapitel gesehen, dass jede endliche Gruppe FA hat. Wir haben auch gesehen, dass es Gruppen der Ordnung ∞ gibt, welche die Eigenschaft nicht haben. Daher stellt sich die Frage: Gibt es Gruppen der Ordnung ∞ mit FA? Im Allgemeinen, mit der Definition ist FA schwer zu zeigen! Ziel unseres nächsten Kapitels ist es zu zeigen, dass die Δ -Bedingung erfüllt ist um zu zeigen, dass die Gruppe FA hat.

(2.1) Definition (Fixpunktuntermenge). Sei G eine Wirkung auf einer Menge X . Dann ist für jedes Element $g \in G$ die Fixpunktuntermenge definiert als

$$\text{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}.$$

Für eine Untergruppe $H \leq G$, setzen wir

$$\text{Fix}(H) = \bigcap_{h \in H} \text{Fix}(h).$$

(2.2) Lemma. Sei G eine Gruppe, die auf einem Baum $\mathcal{T}$ wirkt. Dann ist entweder $\text{Fix}(G) = \emptyset$, oder die Fixpunktmenge ist ein Teilbaum von $\mathcal{T}$.

Beweis. Sei G eine Gruppe, die auf einem Baum $\mathcal{T}$ wirkt. Wir nehmen an, dass $\text{Fix}(G) \neq \emptyset$. Wenn $v, w \in \text{Fix}(G)$, dann gibt es genau einen kürzesten Kantenweg, welcher v und w enthält. Somit muss dieser punktweise von G fixiert werden. Also ist $\text{Fix}(G)$ ein zusammenhängender Teilbaum von $\mathcal{T}$. $\square$

(2.3) Lemma. Sei G eine Gruppe, die auf einem Baum $\mathcal{T}$ wirkt, und seien $H, K \leq G$. Dann gilt:

$$\text{Fix}(\langle H, K \rangle) = \text{Fix}(H) \cap \text{Fix}(K)$$

Beweis. " $\subseteq$ " Wir wissen, dass $H, K \leq \langle H, K \rangle$. Somit gilt

$$\text{Fix}(\langle H, K \rangle) \subseteq \text{Fix}(H) \quad \text{und} \quad \text{Fix}(\langle H, K \rangle) \subseteq \text{Fix}(K)$$

Also gilt hiermit, dass $\text{Fix}(\langle H, K \rangle)$ sowohl in H als auch in K drin liegt, also folgt

$$\text{Fix}(\langle H, K \rangle) \subseteq \text{Fix}(H) \cap \text{Fix}(K).$$

" $\supseteq$ " Wir setzen $x \in \text{Fix}(H) \cap \text{Fix}(K)$, denn dann wird x von allen $h \in H$ und $k \in K$ fixiert. Wir können ein beliebiges Element in $\langle H, K \rangle$ als Produkt $h_1 k_1 h_2 k_2 \cdots h_n k_n$ für $h_i \in H$ und $k_i \in K$ schreiben, wobei $i \in \{1, \dots, n\}$. Also gilt

$$x \cdot (h_1 k_1 \cdots h_n k_n) = (\underbrace{(x \cdot h_1)}_{=x}) k_1 \cdots h_n k_n = (\underbrace{(x \cdot k_1)}_{=x}) h_2 k_2 \cdots h_n k_n = \cdots = (\underbrace{(x \cdot h_n)}_{=x}) k_n = x \cdot k_n = x.$$

Also fixiert x jedes Element $\langle H, K \rangle$. Also folgt

$$x \in \text{Fix}(\langle H, K \rangle).$$

Und somit gilt

$$\text{Fix}(H) \cap \text{Fix}(K) \subseteq \text{Fix}(\langle H, K \rangle).$$

$\square$

(2.4) **Korollar.** Sei G eine Gruppe, die auf einem Baum $\mathcal{T}$ wirkt, und seien $H_1, H_2, \dots, H_n \leq G$. Dann gilt:

$$\text{Fix}(\langle H_1, H_2, \dots, H_n \rangle) = \text{Fix}(H_1) \cap \text{Fix}(H_2) \cap \dots \cap \text{Fix}(H_n).$$

Beweis. Wende den Beweis aus Lemma 2.3 auf $n \in \mathbb{N}$ Untergruppen an. $\square$

(2.5) **Proposition (Δ -Bedingung).** Sei G eine Gruppe, die von drei Untergruppen H_1, H_2 und H_3 erzeugt werden. Wir definieren H_{ij} als die von H_i und H_j erzeugte Untergruppe also $H_{ij} =_{\text{def}} \langle H_i, H_j \rangle$, für $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \leq j$. Wenn H_i und H_{ij} endlich sind, dann hat G die Eigenschaft FA.

Beweis. Sei $G = \langle H_1, H_2, H_3 \rangle$. Wir zeigen:

$$\text{Fix}(G) \neq \emptyset$$

Wir setzen voraus, dass H_i und H_{ij} , für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \leq j$ endlich ist. Dann gilt nach Theorem 1.3

$$\text{Fix}(H_i) \neq \emptyset \quad \text{und} \quad \text{Fix}(H_{ij}) \neq \emptyset$$

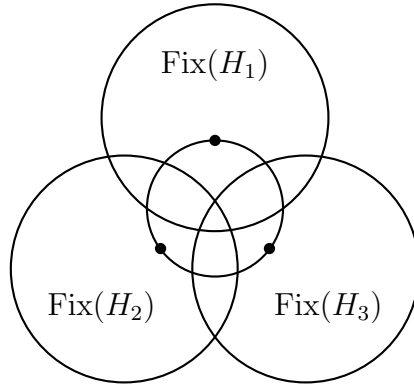
Also können wir folgern, dass

$$\underbrace{\text{Fix}(H_{ij})}_{\neq \emptyset} \stackrel{\text{Lemma 2.3}}{=} \underbrace{\text{Fix}(H_i)}_{\neq \emptyset} \cap \text{Fix}(H_j)$$

Damit aber dies gilt muss auch $\text{Fix}(H_j) \neq \emptyset$, denn angenommen $\text{Fix}(H_j) = \emptyset$, dann wäre $\text{Fix}(H_{ij}) = \emptyset$, was zum Widerspruch führen würde. Also gilt

$$\underbrace{\underbrace{\text{Fix}(H_i)}_{\neq \emptyset} \cap \underbrace{\text{Fix}(H_j)}_{\neq \emptyset}}_{\neq \emptyset} \neq \emptyset.$$

Wir wählen nun $v \in \text{Fix}(H_1) \cap \text{Fix}(H_2)$ und $w \in \text{Fix}(H_2) \cap \text{Fix}(H_3)$. Denn dann liegen v und w sowie der kürzeste Kantenweg zwischen v und w vollständig in $\text{Fix}(H_2)$. Da $v, w \in \text{Fix}(H_1) \cup \text{Fix}(H_3)$ und dieser ein Teilbaum ist liegt der kürzeste Pfad zwischen v und w in $\text{Fix}(H_1) \cup \text{Fix}(H_3)$. Also liegt auch der Weg von v nach w in $\text{Fix}(H_1) \cap \text{Fix}(H_3)$.



Also folgt, dass der kürzeste Kantenweg $\text{Fix}(H_1) \cap \text{Fix}(H_3)$ schneiden muss. Somit gibt es ein Schnittpunkt zwischen $\text{Fix}(H_2)$ und $\text{Fix}(H_i) \cap \text{Fix}(H_j)$. Also existiert ein Punkt in

$$\text{Fix}(H_1) \cap \text{Fix}(H_2) \cap \text{Fix}(H_3).$$

Nun wenden wir Lemma 2.4 an welches zeigt, dass

$$\mathrm{Fix}(G) = \mathrm{Fix}(\langle H_1, H_2, H_3 \rangle) \underbrace{=}_{\text{Lemma 2.4}} \mathrm{Fix}(H_1) \cap \mathrm{Fix}(H_2) \cap \mathrm{Fix}(H_3) \neq \emptyset$$

Also folgt $\mathrm{Fix}(G) \neq \emptyset$. □

(2.6) Lemma (Ebene Spiegelungsgruppen von C. A. Genua-Noguera (siehe Notizen (2.Lemma)). *Seien D_k Drehungen und S_j Spiegelungen um einen Untervektorraum $U \subseteq V$, $k, j \in \{\varphi, \varphi'\}$, $\varphi, \varphi' \in [0, 2\pi[$ dann gilt*

$$S_\varphi S_{\varphi'} = D_{\varphi - \varphi'}$$

(2.7) Beispiel. Wir hatten uns im zweiten Kapitel unseres Seminars die Ebene Spiegelungsgruppen von C. A. Genua-Noguera angeschaut. Dazu hatten wir uns drei Untergruppen dieser Spiegelungsgruppe angeschaut, also $H_1 = \langle r \rangle$, $H_2 = \langle s \rangle$ und $H_3 = \langle t \rangle$. Nun gilt, dass H_1, H_2 und H_3 isomorph zu C_2 sind. Nach Lemma 2.6 von C. A. Genua-Noguera folgt, dass H_{12}, H_{13} und H_{23} isomorph zu der Diedergruppe mit sechs Elementen sind, also D_3 dann folgt, dass $|H_i|, |H_{ij}| < \infty$. Also folgt nach der Δ -Bedingung, dass diese Spiegelungsgruppe FA hat.

3 Die Gruppe $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ der freien Gruppe $\mathbb{F}_n$

Motivation: Wir haben in den letzten zwei Kapiteln gesehen, dass die endlichen Gruppen FA haben und allgemeiner auch Gruppen, welche die Δ -Bedingung erfüllen. Nun stellen wir uns die Frage, für welche $n \in \mathbb{N}$, die Gruppe $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ FA hat. In diesem Kapitel zeigen wir nun, dass für $n \geq 3$ die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ der freien Gruppe $\mathbb{F}_n$ FA hat, und damit folgern wir dann, dass für $n \geq 3$ auch $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ FA hat.

(3.1) Definition (Elementare Automorphismen). Die elementaren Automorphismen von $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ bestehen aus drei Typen von Abbildungen, welche die Erzeuger der freien Gruppe $\mathbb{F}_n$ transformieren:

1. **Permutationsautomorphismen:**

$$x_i \sigma = x_{i\sigma}, \quad \sigma \in \text{Sym}(n)$$

2. **Inversionsautomorphismen:**

$$x_j \iota_i = \begin{cases} x_j^{-1}, & i = j \\ x_j, & \text{sonst} \end{cases}$$

3. **Nielsen-Automorphismen:**

$$x_k \rho_{ij} = \begin{cases} x_i x_j, & k = i \\ x_k, & \text{sonst} \end{cases}, \quad i \neq j$$

(3.2) Bemerkung. Die von den **Permutationsautomorphismen** aufgespannte Untergruppe, sind isomorph zu $\text{Sym}(n)$ und die von den **Inversionsautomorphismen** aufgespannte Untergruppe, sind isomorph zu $(\mathbb{Z}_2)^{\oplus n} \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_{n\text{-mal}}$. Diese bil-

den zusammen $\Omega_n = \langle \sigma, \iota_j \rangle \leq \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ mit $|\Omega_n| = 2^n \cdot n!$, für $\sigma \in \text{Sym}(n)$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ wobei in dem $\langle \sigma, \iota_j \rangle$ alle Erzeuger sowohl von den Permutationsautomorphismen als auch von den Inversionsautomorphismen enthalten sind.

(3.3) Definition. Wir definieren drei Automorphismen von $\mathbb{F}_n$ der Ordnung 2.

$$\vartheta : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_n, \begin{cases} x_1 \mapsto x_1 x_2, \\ x_2 \mapsto x_2^{-1}, \\ x_i \mapsto x_i, \quad i \geq 3. \end{cases}$$

$$\tau : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_n, \begin{cases} x_1 \mapsto x_1^{-1}, \\ x_2 \mapsto x_3, \\ x_3 \mapsto x_2, \\ x_i \mapsto x_i, \quad i \geq 4. \end{cases}$$

$$\eta : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_n, \begin{cases} x_1 \mapsto x_2^{-1}, \\ x_2 \mapsto x_1^{-1}, \\ x_i \mapsto x_i, \quad i \geq 3. \end{cases}$$

Weiter definieren wir drei Untergruppen $H_1 \leq \Omega_n$, $H_2 = \langle \vartheta \rangle$ und $H_3 = \langle \tau \rangle$.

(3.4) Bemerkung. Die Automorphismen ϑ , τ und η haben Ordnung 2, da für $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$x_i \vartheta^2 = x_i, \quad x_i \tau^2 = x_i, \quad x_i \eta^2 = x_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Das folgende Theorem (zuerst bewiesen von Nielsen im Jahr 1924 [5]) ist nicht allzu schwierig, und der interessierte Leser findet eine gute Darstellung davon in [6]. Die Details sind jedoch zu umfangreich, als dass wir sie hier vollständig aufnehmen könnten.

(3.5) Theorem. Die elementaren Automorphismen erzeugen $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$.

(3.6) Korollar. Die Gruppe $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ wird von Ω_n und ρ_{12} erzeugt.

Beweis. Nach Bemerkung 3.2 wissen wir, dass $\Omega_n = \langle \sigma, \iota \rangle \leq \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ mit $|\Omega_n| = 2^n \cdot n!$. Wenn nun σ ein Permutationsautomorphismus ist, dann gilt

$$\rho_{ij}^\sigma = \sigma^{-1} \rho_{ij} \sigma = \rho_{i\sigma(j)\sigma}$$

Zunächst zeigen wir $x_{\sigma(1)} \rho_{12}^\sigma = x_{\sigma(1)} \rho_{\sigma(1), \sigma(2)}$. Betrachte hierfür:

$$x_{\sigma(1)} \rho_{12}^\sigma = x_{\sigma(1)} (\sigma^{-1} \rho_{12} \sigma) = (x_{\sigma(1)} \sigma^{-1}) \rho_{12} \sigma = x_1 \rho_{12} \sigma =$$

$$(x_1 x_2) \sigma = (x_1 \sigma) (x_2 \sigma) = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} = x_{\sigma(1)} \rho_{\sigma(1), \sigma(2)}.$$

Als letztes zeigen wir $x_j \rho_{12}^\sigma = x_j$. Dazu schauen wir uns x_j , für ein $j = \{1, \dots, n\}$ mit $j \neq \sigma(1)$, also $\sigma^{-1}(j) = i \neq 1$. Also gilt

$$x_j \rho_{12}^\sigma = x_j (\sigma^{-1} \rho_{12} \sigma) = (x_j \sigma^{-1}) \rho_{12} \sigma = (x_i \rho_{12}) \sigma = x_i \sigma = x_{\sigma(i)} = x_{\sigma(\sigma^{-1}(j))} = x_j$$

Also folgt insgesamt

$$\rho_{12} = \rho_{\sigma(1), \sigma(2)}, \quad \sigma \in \text{Sym}(n), \quad \text{beliebig}$$

Also haben wir gezeigt, dass durch Konjugation von ρ_{12} mit Elementen σ in $\text{Sym}(n)$ alle anderen ρ_{ij} erzeugt werden können. Somit folgt insgesamt

$$\langle \Omega_n, \rho_{12} \rangle = \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$$

□

(3.7) Lemma. Für $n \geq 3$ der Untergruppen $H_1 \leq \Omega_n$, $H_2 = \langle \vartheta \rangle$, $H_3 = \langle \tau \rangle$ von $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ erfüllen die Δ -bedingung.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ eine Erzeugendenmenge für $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ ist. Sei also σ_{ij} der Permutationsautomorphismus welches die Erzeuger x_i und x_j tauscht. Konjugieren wir den Automorphismus $\sigma_{3n} \in H_1$ mit einem Element $\tau \in H_2$ dann erhalten wir σ_{2n} dies liegt daran, dass mit Definition 3.3 gilt

$$\begin{array}{cccc} x_1 \xrightarrow{\tau} & x_1^{-1} \xrightarrow{\sigma_{3n}} & x_1^{-1} \xrightarrow{\tau} & x_1 \\ x_2 \xrightarrow{\tau} & x_3 \xrightarrow{\sigma_{3n}} & x_n \xrightarrow{\tau} & x_n \\ x_3 \xrightarrow{\tau} & x_2 \xrightarrow{\sigma_{3n}} & x_2 \xrightarrow{\tau} & x_3 \\ x_4 \xrightarrow{\tau} & x_4 \xrightarrow{\sigma_{3n}} & x_4 \xrightarrow{\tau} & x_4 \\ & \vdots & & \\ x_{n-1} \xrightarrow{\tau} & x_{n-1} \xrightarrow{\sigma_{3n}} & x_{n-1} \xrightarrow{\tau} & x_{n-1} \\ x_n \xrightarrow{\tau} & x_n \xrightarrow{\sigma_{3n}} & x_3 \xrightarrow{\tau} & x_2. \end{array}$$

Konjugieren wir $\iota_n \in H_1$ mit σ_{2n} dann erhalten wir ι_2 . Konjugieren wir σ_{3n} mit σ_{2n} dann gilt σ_{23} . Wir erhalten dann auch $\iota_1 = \sigma_{23}\tau$ und σ_{12} in $\langle H_1, H_2, H_3 \rangle$, welches dann $\eta\iota_1\iota_2$ entspricht. Damit enthält die von H_i , für $i \in \{1, 2, 3\}$ erzeugte Untergruppe alle σ_{ij} und alle ι_i für $i \in \{1, \dots, n\}$ und somit auch Ω_n . Da $\vartheta \in H_2$ und $\iota_2 \in \Omega_n$, folgt $\rho_{12} = \vartheta\iota_2 \in \langle H_1, H_2, H_3 \rangle$. Somit enthält $\langle H_1, H_2, H_3 \rangle$ sowohl Ω_n als auch ρ_{12} . Daher gilt nach Korollar 3.6, dass

$$\langle H_1, H_2, H_3 \rangle = \text{Aut}(\mathbb{F}_n).$$

Wir wissen, dass $|H_i| < \infty$. Jetzt ist noch zu zeigen, dass $|H_{ij}| < \infty$.

Wir zeigen zunächst $|H_{12}| < \infty$.

Da $\langle \text{Sym}(n-2), \iota_n \rangle = \Omega_{n-2}$ wobei $\text{Sym}(n-2)$ auf $\{x_3, x_4, \dots, x_n\}$ operiert. Somit gilt $H_{12} = \langle \Omega_{n-2}, \langle \vartheta, \eta \rangle \rangle$. Da die Erzeuger miteinander kommutieren folgt, dass $H_{12} = \Omega_{n-2} \oplus \langle \vartheta, \eta \rangle$. Nach Bemerkung 3.4 folgt, dass ϑ und η die Ordnung 2 haben. Das Produkt $\vartheta\eta$ hat Ordnung 3. Da $\vartheta\eta \neq \eta\vartheta$, folgt insgesamt, dass $\langle \vartheta, \eta \rangle \cong D_3$. Also folgt, dass $H_{12} = \Omega_{n-2} \oplus D_3$. Somit folgt, dass $|H_{12}| = |\Omega_{n-2} \oplus D_3| = |\Omega_{n-2}| |D_3| < \infty$. Nun zeigen wir $|H_{13}| < \infty$.

Da H_{13} von Elementen Ω_n erzeugt sind folgt, dass $H_{13} \leq \Omega_n$. Also folgt $|H_{13}| < \infty$. Jetzt müssen wir nur noch zeigen, dass $|H_{23}| < \infty$.

Da $H_{23} = \langle \vartheta, \tau \rangle$. Nach Bemerkung 3.4 haben ϑ und τ die Ordnung 2, und das Produkt $\vartheta\tau$ hat die Ordnung 4. Somit hat $\langle \vartheta, \tau \rangle$ insgesamt die Ordnung 8. Da zusätzlich $\vartheta\tau \neq \tau\vartheta$ gilt, folgt, dass $\langle \vartheta, \tau \rangle \cong D_4$ also folgt $H_{23} \cong D_4$ und es gilt $|H_{23}| < \infty$.

Da $|H_i|, |H_{ij}| < \infty$, folgt nach Proposition 2.5 die Behauptung. $\square$

(3.8) Theorem. *Die Automorphismengruppe der freien Gruppe $\mathbb{F}_n$, für $n \geq 3$ hat Serre's Eigenschaft FA.*

Beweis. Aus Proposition 2.5 und Lemma 3.7 folgt stets, dass $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ Eigenschaft FA hat. $\square$

(3.9) Lemma. *Wenn G Eigenschaft FA hat, dann hat auch der Quotient von G die Eigenschaft FA.*

Beweis. Wir setzen voraus, dass G die Eigenschaft FA hat. Wir setzen $G/N \cong H$. Nun können wir eine Wirkung von H auf $\mathcal{T}$ stets zu einer Wirkung von G auf $\mathcal{T}$ fortsetzen, mittels der surjektiven Abbildung

$$\varphi : G \rightarrow H$$

und damit erhalten wir $G \rightarrow H \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{T})$. Da G und H das gleiche Bild in $\text{Aut}(\mathcal{T})$ haben, und G einen Fixpunkt aufgrund von FA hat, hat auch H diesen Fixpunkt. Also folgt, dass der Quotient von G auch die Eigenschaft FA hat. $\square$

(3.10) Korollar. *Für $n \geq 3$ erfüllt $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ die Eigenschaft FA.*

Beweis. Wir betrachten den Epimorphismus

$$\varphi : \text{Aut}(\mathbb{F}_n) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_n/[\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_n])$$

Durch $[\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_n]$ erzeugen wir gerade Kommutatorelemente. Die Idee ist nun alle Kommutatoren rauszuteilen indem wir $\mathbb{F}_n/[\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_n]$ haben. Da wir alle Kommutatoren rausgeteilt haben erhalten wir gerade nur Elemente in $\mathbb{F}_n$, also Erzeuger die, die

Struktur $\mathbb{Z}^n$ respektiert. Dies können wir also so vorstellen, als hätten wir die Funktion

$$\psi : \mathbb{F}_n / [\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_n] \rightarrow \mathbb{Z}^n, x_i \mapsto e_i$$

Dadurch erkennen wir, dass jeder Erzeuger x_i bijektiv auf ein Basisvektor e_i geschickt wird. ψ ist offenbar ein Homomorphismus, also folgt $\mathbb{F}_n / [\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_n] \cong \mathbb{Z}^n$. Nach Theorem 3.8 wissen wir nun, dass $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ für $n \geq 3$ Eigenschaft FA hat. Da auch der Quotient nach Lemma 3.9 Eigenschaft FA hat, hat auch $\text{Aut}(\mathbb{F}_n / [\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_n])$ Eigenschaft FA. Also gilt, dass

$$\text{Aut}(\mathbb{F}_n / [\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_n]) \cong \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$$

für $n \geq 3$ auch die Eigenschaft FA hat. Also folgt, dass für $n \geq 3$ auch

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}^n) \cong \text{GL}_n(\mathbb{Z})$$

die Eigenschaft FA hat. Also folgt die Behauptung. $\square$

Nun haben wir gezeigt, dass für $n \geq 3$, $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ und $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ die Eigenschaft FA haben. Was ist mit dem Fall $n < 3$. Haben die Gruppen dann immernoch FA oder wird diese Eigenschaft verletzt? Für $n = 1$ haben wir $\text{Aut}(\mathbb{F}_1)$ nun ist zu prüfen ob diese Gruppe endlich ist. Da

$$\text{Aut}(\mathbb{F}_1) \cong \text{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

ist die Gruppe endlich, also können wir Theorem 1.3 anwenden, womit wir daraus folgern können, dass $\text{Aut}(\mathbb{F}_1)$ die Eigenschaft FA hat. Nun prüfen wir ob $\text{GL}_1(\mathbb{Z})$ endlich ist. Da

$$\text{GL}_1(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^* \cong \{\pm 1\}$$

ist auch $\text{GL}_1(\mathbb{Z})$ endlich, also gilt hier auch nach Theorem 1.3, dass $\text{GL}_1(\mathbb{Z})$ die Eigenschaft FA hat. Nun zu $n = 2$. Also schauen wir uns $\text{Aut}(\mathbb{F}_2)$ an. Nach Korollar 3.10 hatten wir gezeigt, dass $\text{Aut}(\mathbb{Z}^n) \cong \text{GL}_n(\mathbb{Z})$, d.h. $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ ist sehr eng mit der Gruppe $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ verbunden. Weiter wissen wir irgendwie, dass die Gruppe $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ein amalgamiertes Produkt ist. Aber das erfahren wir im nächsten und letzten Kapitel d.h. der Beweis, dass $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ein amalgamiertes Produkt ist bleibt in diesem Kapitel zunächst erstmal offen.

4 Charakterisierung der Eigenschaft FA für abzählbare Gruppen

Motivation: In dem vorherigen Kapitel haben wir bewiesen, dass sowohl $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ als auch $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ für $n \geq 3$ FA hat. Am Ende des vorherigen Kapitels haben wir dies auch für $n = 1$ direkt gezeigt. Nun war aber die Frage ob für $n = 2$ die Eigenschaft FA dieser beiden Gruppen erfüllt ist und hier wollen wir uns einem Theorem widmen, welches in [4] gezeigt wurde. Damit können wir zeigen, dass $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ kein FA hat. Wir stellen uns also zunächst die Frage: Was ist überhaupt ein amalgamiertes Produkt? Wir führen dazu die folgende Definition ein:

(4.1) Definition (Amalgamiertes Produkt). Seien G_1, G_2 zwei Gruppen und seien $A \leq G_1, B \leq G_2$ zwei isomorphe Untergruppen. Sei $\varphi : A \rightarrow B$ ein Isomorphismus. Das amalgamierte Produkt von G_1 und G_2 bzgl. $\varphi : A \rightarrow B$ ist die Faktorgruppe von $G_1 * G_2$ bzgl. des normalen Abschlusses der Menge $\{(a\varphi)a^{-1} \mid a \in A\}$ und wird als $G_1 *_{A=B} G_2$ bezeichnet.

(4.2) Lemma. Die Gruppe $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist ein amalgamiertes Produkt.

Beweis. Wir betrachten die Translationsmatrix $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und die Spiegelungsmatrix $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nun bestimmen wir $R = ST$. Dies gibt uns die Matrix $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Die zugehörigen Ordnungen sind $\text{Ord}(S) = 4$ und $\text{Ord}(R) = 6$. Weiter wissen wir, dass $R^3 = S^2 = -\text{Id}$. Also erhalten wir die folgende Präsentation von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle x, y \mid x^4 = y^6 = x^2y^3 = 1 \rangle$$

Nun betrachten wir $A = \{\text{Id}, x^2\}$ und $B = \{\text{Id}, y^3\}$, dann gilt $A \cong C_2$ und $B \cong C_2$, daraus folgt $A \cong B$. Nun setzen wir $G_1 = C_4$ und $G_2 = C_6$ mit $A \leq G_1$ und $B \leq G_2$, dann existiert ein Isomorphismus $\varphi : A \rightarrow B$ welches die Faktorgruppe von $C_4 * C_6$ bzgl. des normalen Abschlusses der Menge $\{(a\varphi)a^{-1} \mid a \in A\}$ ist. Also erhalten wir per Definition das gewünschte amalgamierte Produkt $C_4 *_{C_2} C_6$. Nun betrachten wir die Abbildung

$$\psi : C_4 *_{C_2} C_6 \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z}), \begin{cases} r \mapsto R \\ s \mapsto S \end{cases}$$

Dann gilt

$$(r\psi)^6 = \text{Id}, (s\psi)^4 = \text{Id} \quad (r\psi)^2(s\psi)^3 = \text{Id}$$

Also ist ψ nach dem Dyckschen Lemma ein Epimorphismus. Nun ist noch zu zeigen, dass ψ injektiv ist. Sei also $g \in \text{Kern}(\psi)$, dann können wir

$$g = r^a s^b, \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

setzen. Also gilt

$$g\psi = (r^a s^b)\psi = (r^a\psi)(s^b\psi) = (r\psi)^a(s\psi)^b = \text{Id}$$

$$\Leftrightarrow (r\psi)^a = \text{Id}, (s\psi)^b = \text{Id}$$

$$\Rightarrow a = 6, b = 4$$

Also ist $g = \text{Id}$. Somit ist ψ injektiv. Also ist ψ ein Isomorphismus. Also folgt

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong C_4 *_{C_2} C_6.$$

□

(4.3) Theorem. *Sei G eine abzählbare Gruppe. Dann besitzt G die Serre's Eigenschaft FA genau dann, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:*

$$(1) \ G \not\cong G_1 *_A G_2$$

$$(2) \ \nexists N \trianglelefteq G : G/N \cong \mathbb{Z}$$

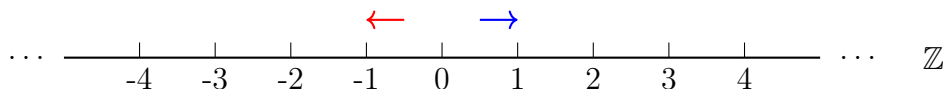
(3) G ist endlich erzeugt.

Beweis. " $\Rightarrow$ "

"(FA) $\Rightarrow$ (1)" Wir machen einen Widerspruchsbeweis: Angenommen, die Gruppe G ist als amalgamiertes Produkt $G = A *_C B$ gegeben, wobei $G_1 \neq A$ und $G_2 \neq B$ gelten. Nun betrachten wir einen Baum $\mathcal{T}$, mit einer Gruppenwirkung $\mathcal{T} \curvearrowright G$, wobei das Segment PQ als Fundamentalbereich dient. Das bedeutet, dass die gesamte Gruppenwirkung auf $\mathcal{T}$ durch die Wirkung auf dieses Segment beschrieben werden kann. Die der Punkte P und Q sind gegeben durch $\text{Stab}(P) = G_1$ und $\text{Stab}(Q) = G_2$. Da G ein amalgamiertes Produkt ist, folgt aus der Definition, dass $G_1 \neq G_2$ folgt, dass kein Element von G das gesamte Segment hält, also gilt $\text{Stab}(PQ) = \text{Id}$. Das bedeutet, dass ein Gruppenelement, das Segment PQ fixiert. $\nexists$

Widerspruch zur Annahme: Da $G_1 \neq G_2$, existiert kein Fixpunkt. Also war unsere Annahme falsch. Also gilt $G \neq A *_C B$.

"(FA) $\Rightarrow$ (2)" Wir machen einen Widerspruchsbeweis: Angenommen es existiert der Quotient $G/N \cong \mathbb{Z}$ dann können wir den Quotienten durch die Wirkung $\mathbb{Z} \curvearrowright G/N$ durch Translationen auf einer zweiseitig unendlichen Kette wirken lassen.



Sei $x \in \mathbb{Z}$ dann gilt aber $\text{Stab}(x) = \text{Id}$, also existiert ein Fixpunkt. $\nexists$.

Widerspruch zur Annahme, da durch Translation alle Punkte bewegt werden und somit keine Fixpunkte existieren. Also war unsere Annahme falsch. Also gilt $G/N \not\cong \mathbb{Z}$.

"(FA) $\Rightarrow$ (3)" Wir setzen voraus, dass G abzählbar ist. Dann existiert eine unendlich aufsteigende Kette von endlich erzeugten Untergruppen $G_1, G_2, \dots, G_n$ mit der Gestalt

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n \subset \dots$$

Nun konstruieren wir einen Graphen $\mathcal{T}$, dessen Menge der Knoten die disjunkte Vereinigung der Mengen G/G_n ist. Nun werden zwei Knoten P und Q durch eine Kante verbunden, wenn diese zu zwei aufeinanderfolgenden Mengen G/G_n und G/G_{n+1} gehören und dementsprechend unter der kanonischen Abbildung $\eta : G/G_n \rightarrow G/G_{n+1}$

korrespondieren. Nun stellt sich heraus, dass $\mathcal{T}$ ein Baum ist und somit dann $\mathcal{T} \curvearrowright G$ auf natürlicher Weise wirkt. Da wir vorausgesetzt haben, dass G die Eigenschaft FA hat, existiert ein Knoten $x \in \mathcal{T}$ mit $\text{Stab}(x) = G$. Falls zusätzlich $x \in G/G_n$ dann folgt $G_n = G$. Da G_n nach Konstruktion endlich erzeugt ist, folgt somit, dass auch G endlich erzeugt ist.

" $\Leftarrow$ " Nun setzen wir voraus (1), (2) und (3) gelten und $X \curvearrowright G$. Falls $\mathcal{T} = G \backslash X$ dann ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathcal{T}) \cong G$. Denn angenommen $\pi_1(\mathcal{T})$ ist eine freie Gruppe dann gilt $\pi_1(\mathcal{T}) = 1 \neq G$. Also ist es unmöglich die ganze Gruppe zu konstruieren. Also ist $\mathcal{T}$ ein Baum und somit existieren Teilbäume von X . Nun können wir die Gruppe als $G_{\mathcal{T}} = \lim(G, \mathcal{T})$ identifizieren, wobei $G_{\mathcal{T}}$ die Grenze des Baumes von Gruppen sind die durch die Gruppen G_P und G_Y definiert sind, welche die Knoten P bzw. die Kanten Y von $\mathcal{T}$ fixieren. Nun folgt, dass G die Vereinigung der Gruppen $G_{\mathcal{T}'} = \lim(G, \mathcal{T}')$ ist, wobei $\mathcal{T}'$ durch die Menge der endlichen Teilbäume von $\mathcal{T}$ läuft. Da wir (3) vorausgesetzt haben gilt, dass G endlich erzeugt ist, also gibt es einen Baum $\mathcal{T}'$, sodass $G = G_P$. Also hat G einen Fixpunkt und es gilt, dass G die Eigenschaft FA hat. Falls aber (3) nicht gilt, dann besitzt $\mathcal{T}$ einen Endknoten P und $\mathcal{T}'' = \mathcal{T}' - P$ somit ist dieser ein Baum. Falls also Y die einzige Kante bezeichnet die P mit $\mathcal{T}''$ verbindet, dann gilt

$$G = G_{\mathcal{T}'} = \mathcal{T}'' *_A G_P, \quad A = G_Y$$

Also gilt aufgrund der Minimalhypothese zu $\mathcal{T}'$, dass $G_{\mathcal{T}''} \neq G$ und $G_P \neq G$. Dies zeigt, dass G ein amalgamiertes Produkt ist. Also ist (1) nicht erfüllt. Somit zeigt sich, dass G die Eigenschaft FA dann nicht erfüllt. $\square$

Nun kommen wir zum alles entscheidenden Theorem!

(4.4) Theorem. *Die Gruppe $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ erfüllt die Serre's Eigenschaft FA nicht.*

Beweis. Angenommen $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ erfüllt die Eigenschaft FA. Bevor wir den Beweis durchführen, stellen wir uns die Frage ob $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ als ein amalgamiertes Produkt schreiben lässt? Wenn ja sind wir nach Theorem 4.3 fertig und diese Gruppe hat dann kein FA! Nach [3] hat O. V. Bogopolski erwähnt, dass sich $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ tatsächlich als amalgamiertes Produkt schreiben lässt, also

$$\text{GL}_2(\mathbb{Z}) \cong D_4 *_{D_2} D_6$$

Wir zeigen also $\text{GL}_2(\mathbb{Z}) \cong D_4 *_{D_2} D_6$. Da wir nach Lemma 4.2 gezeigt haben, dass $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ein amalgamiertes Produkt ist, betrachten wir nun die Translationsmatrix $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und die Spiegelungsmatrix $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nun bestimmen wir $R = ST$. Dies gibt uns die Matrix $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Die zugehörigen Ordnungen sind $\text{Ord}(S) = 4$ und $\text{Ord}(R) = 6$. Da wir nun Verschiebungen anschauen, die nach endlich vielen Schritten wieder den Ursprung erreichen, brauchen wir zwei verschiedene Spiegelungen, für zwei Präsentationen, also wählen wir $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Nun rechnen wir die Matrizen mit der zugehörigen Involution aus, mittels Matrixmultiplikation. Dadurch landen wir in der Diedergruppe. Also gilt für die eine Präsentation

$$T_P = TP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$S_P = SP = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$R_P = RP = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

und für die andere Präsentation

$$T_Q = TQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$S_Q = SQ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$R_Q = RQ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nun prüfen wir, dass wir durch diese Matrizen die Struktur sowohl für D_4 als auch für D_6 bekommen. Wir betrachten die folgenden Präsentationen:

$$D_4 = \langle x_1, x_2 \mid x_1^4 = x_2^2 = (x_1 x_2)^2 = 1 \rangle$$

$$D_6 = \langle y_1, y_2 \mid y_1^6 = y_2^2 = (y_1 y_2)^2 = 1 \rangle.$$

Nun setzen wir $x_1 = S$ und $x_2 = Q$, dann erfüllt dies die Struktur für D_4 . Setzen wir $y_1 = R$ und $y_2 = P$, dann erfüllt dieser auch die Struktur für D_6 . Nun betrachten wir

$$A = \{\text{Id}, x_1^2, x_2, x_2 x_1\} \quad \text{und} \quad B = \{\text{Id}, y_1^3, y_2, y_2 y_1\}$$

Dann folgt $A \cong D_2$ und $B \cong D_2$. Daraus folgt $A \cong B$. Nun setzen wir $G_1 = D_4$ und $G_2 = D_6$ mit $A \leq G_1$ und $B \leq G_2$, dann existiert ein Isomorphismus $\varphi : A \rightarrow B$, welches die Faktorgruppe von $D_4 * D_6$ bzgl. des Normalen Abschlusses der Menge $\{(a\varphi)a^{-1} \mid a \in A\}$ ist. Also erhalten wir nach Definition 4.1 das gewünschte amalgamierte Produkt $D_4 *_{D_2} D_6$. Nun haben wir herausgefunden, dass wir durch diese Matrizen die wir konstruiert haben, Plus die der Definition 4.1 ein amalgamiertes Produkt existiert. Nun ist zu zeigen, dass dies auch die Gruppe $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ ist. Wir wissen, dass die Matrizen T_D, S_D und R_D invertierbare Matrizen mit Determinante gleich 1 sind. Also sind die Voraussetzungen für $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ erfüllt. Wir betrachten die Abbildung

$$\psi : D_4 *_{D_2} D_6 \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z}), \quad \begin{cases} r \mapsto S \\ s \mapsto R \\ t \mapsto P \\ u \mapsto Q \end{cases}$$

Dann gilt

$$(r\psi)^4 = \text{Id}, (u\psi)^2 = \text{Id}, ((ru)\psi)^2 = ((r\psi)(u\psi))^2 = \text{Id}$$

und

$$(s\psi)^6 = \text{Id}, (t\psi)^2 = \text{Id}, ((st)\psi)^2 = ((s\psi)(t\psi))^2 = \text{Id}$$

Also ist ψ nach dem Dyckschen Lemma ein Epimorphismus. Nun ist noch zu zeigen, dass ψ injektiv ist. Wir betrachten $g \in \text{Kern}(\psi)$. Somit können wir

$$g = r^a s^b t^c u^d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

setzen. Also gilt

$$g\psi = (r^a s^b t^c u^d)\psi = (r^a\psi)(s^b\psi)(t^c\psi)(u^d\psi) = (r\psi)^a (s\psi)^b (t\psi)^c (u\psi)^d = \text{Id}$$

$$\Leftrightarrow (r\psi)^a (s\psi)^b (t\psi)^c (u\psi)^d = \text{Id}$$

$$\Leftrightarrow (r\psi)^a = \text{Id}, (s\psi)^b = \text{Id}, (t\psi)^c = \text{Id}, (u\psi)^d = \text{Id}$$

$$\Rightarrow a = 4, c = d = 2, b = 6.$$

Also folgt $g = \text{Id}$. Also ist ψ injektiv. Also ist ψ ein Isomorphismus. Also folgt

$$\text{GL}_2(\mathbb{Z}) \cong D_4 *_{D_2} D_6.$$

Also haben wir gezeigt, dass sich $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ als amalgamiertes Produkt schreiben lässt. Also folgt nach Theorem 4.3, dass $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ Eigenschaft FA hat. $\nmid$. Widerspruch zur Annahme, da $\text{GL}_2(\mathbb{Z}) \cong D_4 *_{D_2} D_6$ aber $\text{GL}_2(\mathbb{Z}) \not\cong D_4 *_{D_2} D_6$ gelten sollte. Also war unsere Annahme falsch, also folgt, dass $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ die Eigenschaft FA nicht erfüllt. $\square$

Wir haben also gezeigt, dass tatsächlich die Gruppe $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ die Serre's Eigenschaft FA nicht erfüllt. Wir hatten im Kapitel der $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ bewiesen, dass auch die für $n \geq 3$ FA besitzt, was die Frage aufwirft, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Innere Automorphismengruppe $\text{Inn}(\mathbb{F}_n)$ oder die äußere Automorphismengruppe $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ FA haben könnten. Eine systematische Untersuchung dieser Gruppen könnte zu einer allgemeinen Klassifikation führen, für welche Gruppen G die Automorphismengruppe $\text{Aut}(G)$ diese Eigenschaft besitzt. In [7] wurde bereits gezeigt, dass Automorphismengruppen freier Produkte FA besitzen. Besonders spannend wäre die Untersuchung, ob auch pro-endliche Gruppen diese Fixpunkteigenschaft erfüllen, was neue Verbindungen zur algebraischen und topologischen Gruppentheorie eröffnen könnte.

Literatur

- [1] J. Meier: *Groups, Graphs and Trees*, Cambridge University Press, 2008.
- [2] O. Bogopolski: *Algorithmic Group Theory*, Universität Düsseldorf, 2007.
- [3] O.V. Bogopolski, *Arboreal decomposability of the group of automorphisms of a free group*, *Algebra i Logika* **26** (1987), 131–149.
- [4] J.-P. Serre: *Trees*, Springer, 1980.
- [5] J. Nielsen, *Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen*, *Math. Ann.* **91** (1924), 169–209.
- [6] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial Group Theory*, John Wiley, 1966. (Reprinted by Dover)
- [7] N. Andrew, *Serre's Property (FA) for automorphism groups of free products*, *J. Group Theory* **24** (2021), 385–414.