Seminarplan Geometrische Gruppentheorie

Benjamin Klopsch und Philip Möller

30. Januar 2025

1 Vorträge

09.04.25 Vorbesprechung; Einführung. [1, Kapitel 1] (Klopsch)

16.04.25 Kranzprodukte und Lamplighter Gruppe; [1, Kapitel 8]. (Möller)

23.04.25 Affine Coxetergruppen und kristallographische Gruppen; [1, Kapitel 2]+weitere Ressourcen. (Genua-Noguera)

30.04.25 Freie Gruppen und Präsentierungen; [1, Kapitel 3.1,3.3]. (Hecker)

07.05.25 Gruppenwirkungen auf Bäumen; [1, Kapitel 3.2,3.4]. (Statz)

14.05.25 Freie Produkte von Gruppen; [1, Kapitel 3.5,3.6]. (Majid)

21.05.25 Virtuell freie Gruppen; [1, Kapitel 3.7,3.8]. (Untch)

28.05.25 Die Serresche Eigenschaft FA; [1, Kapitel 3.9,3.10]. (Kroustouris)

04.06.25 Das Dehnsche Wortproblem; [1, Kapitel 5.1,5.2,5.3]. (Hauchwitz)

11.06.25 Baumslag-Solitar Gruppe $BS(1,2)$; [1, Kapitel 4,5.4]. (Rusakow)

18.06.25 Die Gupta-Sidki-Gruppe; [1, Kapitel 6]. (Himli)

25.06.25 Reguläre Sprachen; [1, Kapitel 7.1,7.2]. (Ziske)

02.07.25 Reguläre Normalformen und der Satz von Howson; [1, Kapitel 7.3,7.4,7.5]. (Zhang)

09.07.25 Weitere Themen/Puffer

16.07.25 Weitere Themen/Puffer

2 Ausführungen zu den Vorträgen

2.A Vortrag 1

Vergabe weiterer Vorträge und klären weiterer Fragen.

Kurze grundlegende Motivation der geometrischen Gruppentheorie. Einführung und Wiederholung der wichtigen Grundbegriffe und Konventionen. Definition und Beispiele eines Graphen, Cayley's Theorem(e).

2.B Vortrag 2

Je nach Länge der Vorbesprechung Cayley's "besseres Theorem" und Beispiele von Cayley Graphen. Die Lamplighter group als ein weiteres, instruktives, nicht-triviales Beispiel.

2.C Vortrag 3

Weitere Beispiele für Gruppen, die aus der Geometrie stammen/eine geometrische Interpretation haben. Führen Sie affine Coxetergruppen ein und diskutieren Sie gerne auch 2-dimensionale kristallographische Gruppen. Für die Coxetergruppen folgen Sie [1, Kapitel 2]; für die kristallographischen Gruppen verwenden Sie eine Quelle Ihrer Wahl, deren Konventionen nah am Buch von Meier sind.

2.D Vortrag 4

Definieren Sie "die" freie Gruppe mit n Erzeugern. Diskutieren Sie folgend Cayley-Graphen von F_2. Besprechen Sie die universelle Eigenschaft der freien Gruppe ([1, Theorem 3.15]) und geben Sie die Definition einer Gruppenpräsentierung. Diskutieren Sie zumindest ein Beispiel.

2.E Vortrag 5

Diskutieren Sie zunächst, dass F_2 eine Untergruppe von endlichem Index enthält, welche isomorph zu F_3 ist. Der Rest des Vortrags soll dann dazu genutzt werden, den Satz von Nielsen-Schreier geometrisch zu beweisen (der Satz besagt, dass jede Untergruppe einer freien Gruppe frei ist [1, Korollar 3.23]). Beweisen Sie hierzu die Charakterisierung, dass eine Gruppe genau dann frei ist, wenn sie frei auf einem Baum operiert [1, Theorem 3.20].

2.F Vortrag 6

Geben Sie die Definition eines allgemeinen freien Produkts von Gruppen ([1, kapitel 3.6]) und diskutieren Sie das Beispiel aus [1, Kapitel 3.5]. Diskutieren Sie insbesondere den Zusammenhang dieser freien Produkte mit Wirkungen auf Bäumen, d.h. [1, Theorem 3.28].

2.G Vortrag 7

Definieren Sie, was heißt, dass eine Gruppe "virtuell frei ist. Diskutieren Sie folgend [1, Theorem 3.35] algebraisch und geometrisch. Folgern Sie, dass freie Produkte von endlichen Gruppen virtuell frei sind.

2.H Vortrag 8

Führen Sie Serre's Eigenschaft FA ein. Diskutieren Sie folgend, wieso endliche Gruppen diese Eigenschaft haben. Diskutieren Sie, wieso die Automorphismengruppe von F_3 FA hat und folgern Sie dies für $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$. Wenn möglich, geben Sie einen kurzen Ausblick, dass es eine Charakterisierung von Eigenschaft FA für abzählbare Gruppen gibt (Siehe z.B. [2, Theorem 15]).

2.I Vortrag 9

Erläutern Sie, was eine Normalform in einer Gruppe ist. Diskutieren Sie nachfolgend Dehn's Wortproblem und den Zusammenhang zu Cayley-Graphen. Diskutieren Sie das Beispiel des freien Produkts von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

2.J Vortrag 10

Führen Sie die Baumslag-Solitar Gruppen ein und diskutieren Sie insbesondere das Beispiel $BS(1,2)$ und ihren Cayley Graphen. "Motivieren" Sie die Definitionen dieser Gruppen durch das Diskutieren (ohne Beweis) der etwas überraschende Eigenschaft von $BS(2,3)$, dass ein surjektiver Gruppenepimorphismus existiert, welcher kein Gruppenisomorphismus ist. Sie können hier auch eine andere Eigenschaft wählen (z.B. nicht residuell-endlich sein und nicht-lösbares Wortproblem besitzen).

2.K Vortrag 11

Definieren Sie die Definition der Gupta-Sidki Gruppe, einer unendlichen Torsionsgruppe. Wenn möglich, gehen Sie (kurz) auf Burnsides Frage ein und geben Sie diesbezüglich einen (kleinen) Ausblick.

2.L Vortrag 12

Führen Sie Sprachen und Automaten ein. Erklären Sie reguläre Sprachen, "finite state automata" und "deterministic".

2.M Vortrag 13

Setzen Sie das Wortproblem in Zusammenhang mit regulären Sprachen. Diskutieren sie sodann, wieso die Gupta-Sidki Gruppe keine reguläre Normalform erlaubt. Beweisen Sie abschließend Howson's Theorem und diskutieren Sie die Voraussetzung, dass es sich um Untergruppen der freien Gruppe handelt.

Literatur

[1] J. Meier, Groups, Graphs and Trees, Cambridge University Press 2008.

[2] J. P. Serre, Trees. Spinger, 1980.