

PROSEMINAR: PERLEN DER LINEAREN ALGEBRA**Montags 14:30 Uhr, Seminarraum 25.22.00.72**

EINLEITUNG

Die Techniken und Methoden der linearen Algebra erlauben bereits eine Vielzahl hochinteressanter und relevanter Anwendungen, von denen wir einige in diesem Proseminar kennenlernen wollen. Beispielsweise lassen sich Graphen durch Invarianten der Linearen Algebra wie Spur und Determinante untersuchen, was eine Verbindung zu Kombinatorik und Datenstrukturen herstellt. Auch der PageRank, mit dessen Hilfe Algorithmen von Suchmaschinen für das WWW ihre Ergebnislisten erzeugen, basiert im Kern auf der Berechnung eines Eigenvektors.

Hauptquelle des Seminars ist das Buch “Thirty-three miniatures mathematical and algorithmic applications of linear algebra” von Jiri Matousek [Mat10]. Hierin finden sich Anwendungen der linearen Algebra auf verschiedene Gebiete wie Kombinatorik, Geometrie und Nachrichtenübermittlung.

VORKENNTNISSE

Das Proseminar richtet sich an alle Studierende des Bachelorstudiengangs “Mathematik und Anwendungsgebiete”. Als Vorkenntnisse wird lediglich die Lineare Algebra 1 benötigt.

VORTRAGSPROGRAMM

1: GRUNDLAGEN DER GRAPHENTHEORIE (Raphael Statz).

Definition und Beispiele von Graphen (vollständig, zyklisch), Adjazenzmatrix, geometrische Bedeutung der Potenz, Spurformeln, Inzidenzmatrix, Spektrum eines Graphen, Eigenwerte regulärer Graphen und Komplemente mit Beispielen.

Literatur: [GR01, 1.1, 1.7, 8.1, 8.2, 8.5]

2: SPANNBAUMZAHL VIA DETERMINANTE (Ilja Volinski).

Definition von Spannbäumen und Beispiele, Aussage des Matrix-Baum-Satzes, Laplace-Matrix, Beispiele, Beweis des Satzes.

Literatur: [Mat10, Miniature 21]

3: DER PETERSEN-GRAPH (Chany Genua).

Definition des Petersen-Graphs, Eigenschaften, mit drei Petersen-Graphen lässt sich der K_{10} nicht überdecken (inkl. Beweis), Moore-Graphen, Moore-Graphen haben Grad 1, 3, 7 oder 57, wenn sie Taillenweite 5 haben (inkl. Beweis)

Literatur: [Mat10, Miniatures 13, 14]

4: POSITIVE DEFINITHEIT UND EXTREMALE MENGENLEHRE (Hanna Hecker).
Beispiele für kombinatorische Sätze über Durchschnitte von Mengen (inkl. Beweis), Beispielanwendungen

Literatur: [Mat10, Miniature 3, 4, 17]

5: PROBABILISTISCHE TESTS FÜR ALGEBRAISCHE OPERATIONEN (Dal Yavuzalp).
Probabilistischer Test für Matrix-Multiplikation, Satz von Schwartz-Zippel (inkl. Beweis), probabilistischer Test für Assoziativität

Literatur: [Mat10, Miniature 11, 27]

6: ERROR CORRECTING CODES (Philipp Hauchwitz).
Grundbegriffe (insbes. Hamming-Abstand), Beispiele, lineare Codes, Hamming-Code, verallgemeinerter Hamming-Code, Eigenschaften des Hamming-Codes (mit Beweis), Beispiele, Überblick über Anwendungen

Literatur: [Mat10, Miniature 5]

7: SHANNON-KAPAZITÄT (Nikolas Wallau).

Definition der Shannon-Kapazität von Graphen, Bestimmung der Shannon-Kapazität von C_5 , Beispiel-Anwendung.

Literatur: [Mat10, Miniature 28]

8: PAGERANK (Robin Lübke).

Der Satz von Perron-Frobenius, Erklärung des PageRank-Verfahrens als Eigenvektorproblem, Beispiele, einfache Modifikationen, Zusammenhang mit dem Satz von Perron-Frobenius

Literatur: [Sha15, Kapitel 17; GR01, 8.7, 8.8; Aus; BL]

Weitere Mögliche Themen:

- Günstiges Zerlegen von Graphen [Mat10, Miniature 31]
- Euklidische Abstände [Mat10, Miniature 6, 7]
- (Fast) gleichseitige Mengen [Mat10, Miniature 15, 30]
- Shannon-Kapazität [Mat10, Miniature 28]
- Polytope [Zie95, 0.0-0.5; 1.1, 1.2]
- Ecken, Seiten und Facetten [Zie95, 1.4, 2.1, 2.2]
- Beispiele von Polytopen [Zie95, 0.6-0.13]

Es sind noch ausreichend Seminarplätze verfügbar. Wenn Sie Interesse an einer Teilnahme haben, kontaktieren Sie mich gerne per E-Mail.

Ablauf des Proseminars

Notwendig für die erfolgreiche Teilnahme sind:

- Ein 75-minütiger Vortrag; die verbleibenden 15 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Anwesenheit und aktive Teilnahme bei allen Vorträgen. (Stellen Sie bitte immer Fragen, wenn sie etwas nicht verstehen.)
- Optional: ein Handout von eins bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags enthält.

- Bitte suchen Sie mich rechtzeitig vor Ihrem Vortrag auf (etwa zwei Wochen zuvor), um etwaige Fragen zu klären und den Vortrag durchzusprechen. Den Stoff Ihres Vortrags sollten Sie bis dahin durchgearbeitet und durchdrungen haben. In der Besprechung geht es *nur noch* um letzte offengebliebene Fragen und die vortragstechnische Aufbereitung.

Hinweise zur Vorbereitung und zum Halten des Vortrags

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung und nutzen Sie Sprechstunden und das Gespräch mit Mitstudierenden. Dadurch vermeiden Sie Unklarheiten über die Kernaussagen, die Ihr Vortrag enthalten soll (Stichwort: Themaverfehlung).
- Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Vortragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkonsistenzen oder Überschneidungen kommt.
- Machen Sie einen Probenvortrag (versuchen Sie irgendwo einen Raum mit Tafel dafür zu bekommen), um Sicherheit zu gewinnen.
- Die Klarheit von Definitionen und Begriffen hat höchste Priorität. Eine unverständliche Definition ist (noch) schlimmer als eine unverständliche Rechnung.
- Versuchen Sie immer den Kern und die Idee einer komplizierten Aussage auszudrücken, bevor Sie ins Detail gehen. Möglichst viele Beispiele machen den Vortrag verständlicher.
- Schreiben Sie lesbar und planen Sie Ihr Tafelbild vorher. Alle Definitionen müssen an der Tafel stehen. Sprechen Sie laut und deutlich.
- Das fachliche Beherrschen des Stoffs ist die Grundlage von allem. Ist diese aber gelegt, versuchen Sie auch einen Vortrag zu halten, dem man gerne zuhört. Kleben Sie nicht zu sehr an Ihrem Zettel. Zeigen Sie Elan. Haben Sie keine Angst vor Zwischenfragen, da Kommunikation mit dem Publikum einen Vortrag immer lebendiger macht. Machen Sie mal eine humorvolle Zwischenbemerkung... Lachen erhöht die Konzentration des Publikums.

LITERATUR

- [Aus] D. Austin, *How Google Finds Your Needle in the Web's Haystack*, AMS Feature Column. <http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-pagerank>.
- [BL] K. Bryan and T. Leise, *The \$ 25,000,000,000 eigenvector. The linear algebra behind Google*. <http://www.rose-hulman.edu/~bryan/googleFinalVersionFixed.pdf>.
- [GR01] Chris Godsil and Gordon Royle, *Algebraic graph theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 207, Springer-Verlag, New York, 2001. MR1829620
- [Mat10] Jiří Matoušek, *Thirty-three miniatures*, Student Mathematical Library, vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. Mathematical and algorithmic applications of linear algebra. MR2656313
- [Sha15] Helene Shapiro, *Linear algebra and matrices*, Pure and Applied Undergraduate Texts, vol. 24, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. Topics for a second course. MR3408220
- [Zie95] Günter M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 152, Springer-Verlag, New York, 1995. MR1311028

Holger Kammeyer, holger.kammeyer@hhu.de