Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Topologie I, WiSe 22/23
Blatt 2

Für das gesamte Blatt sei R ein (kommutativer) Ring (mit 1).

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Weisen Sie nach, dass für jede R-lineare Abbildung $f\colon A \to B$ die Sequenz von R-Moduln $0 \longrightarrow \ker(f) \xhookrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{q} \operatorname{coker}(f) \longrightarrow 0$ exakt ist.

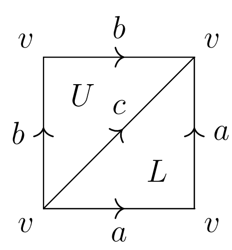
Aufgabe 2 (5 Punkte):
Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) Ist $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von $\mathbb{Z}$-Moduln, so ist $B \cong A \oplus \mathbb{Z}$.

(ii) Ist $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von $\mathbb{Z}$-Moduln, so ist $B \cong A \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(iii) Ist $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Moduln, so ist $B \cong A \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Wir betrachten folgenden Δ-Komplex:



(i) Begründen Sie kurz, dass dieser Δ-Komplex eine Kleinsche Flasche K ist und, dass der Unterkomplex L ein eingebettetes Möbiusband ist.

(ii) Bestimmen Sie die simplizialen Homologiegruppen $H_*^{\Delta}(K;R)$, $H_*^{\Delta}(L;R)$ und $H_*^{\Delta}(K,L;R)$ für $R=\mathbb{Z}$ und $R=\mathbb{F}_2$.

(iii) Geben Sie basierend auf Ihren vorherigen Berechnungen alle Gruppen und Gruppenhomomorphhismen der langen exakten Homologiesequenz des Δ-Paares (K,L) konkret an.

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Topologie I, WiSe 22/23
Blatt 2

Aufgabe 4 (5 Punkte):
In dieser Aufgabe arbeiten wir nur mit der Kategorie R-Mod der R-Moduln und R-linearen Abbildungen. Sei zudem M ein fester R-Modul.

(i) Zeigen Sie, dass eine Sequenz $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$ genau dann exakt ist, wenn $A = B \times_C 0$ ist und, dass dual eine Sequenz $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ genau dann exakt ist, wenn $C = B \amalg_A 0$ ist.

(ii) Folgern Sie, dass der Funktor $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ linksexakt ist, also exakte Sequenzen der Form $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$ erhält und, dass der Funktor $M \otimes_R -$ rechtsexakt ist, also exakte Sequenzen der Form $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ erhält.

Hinweis: Blatt 12 Aufgabe 2 (Aussage gilt auch für Moduln) und Blatt 13 Aufgabe 4 aus der Einführung in die Topologie könnten für (ii) nützlich sein.