Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Topologie I, WiSe 22/23
Blatt 3

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Wir betrachten folgende exakte Sequenz von abelschen Gruppen:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\Delta"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r] & F \arrow[dll, "0"] \\
\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & E \arrow[r] & \mathbb{Z}^3 \arrow[dll, "0"] \\
D \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r] & C \arrow[dll] \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "0"] & A \arrow[dll] \\
\mathbb{Z}^2 \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

wobei $\Delta\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2, m \mapsto (m,m)$ die Diagonale ist. Bestimmen Sie die abelschen Gruppen A, B, C, D, E und F.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Sei R ein (kommutativer) Ring (mit 1) und sei (H_*, ∂_*) eine Homologietheorie mit Werten in der Kategorie R-Mod der R-Moduln. Sei zudem (X,A) ein Raumpaar so, dass es eine Retraktion $r\colon X \to A$ gibt. Zeigen Sie, dass die lange exakte Homologiesequenz des Raumpaares (X,A) in spaltenden kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X,A) \longrightarrow 0$$

resultiert, wobei n eine nicht-negative ganze Zahl ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Sei R ein (kommutativer) Ring (mit 1) und M ein fester R-Modul. Auf dem letzten Blatt haben wir uns überlegt, dass der Funktor $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ linksexakt und der Funktor $M \otimes_R -$ rechtsexakt ist.

(i) Zeigen Sie, dass falls $R = K$ ein Körper ist, diese beiden Funktoren exakt sind.

(ii) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass diese beiden Funktoren im Allgemeinen nicht exakt sind.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
In der Vorlesung haben wir das Schlangenlemma behandelt und die Exaktheit an $\ker(g)$ nachgewiesen. Zeigen Sie die Exaktheit an $\ker(h)$.