Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Topologie I, WiSe 22/23
Blatt 4

Auf dem gesamten Blatt sei R ein (kommutativer) Ring (mit 1).

Aufgabe 1 (5 Punkte):

(i) Ist jeder Morphismus von Kettenkomplexen von R-Moduln, welcher auf der Homologie Nullabbildungen induziert, homotop zur Nullabbildung?

(ii) Ist jeder Morphismus von Kettenkomplexen von R-Moduln, welcher auf der Homologie Isomorphismen induziert, eine Homotopieäquivalenz?

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Man nennt einen Kettenkomplex $(C_\bullet, d_\bullet^C)$ von R-Moduln

- exakt oder azyklisch, falls $\ker(d_n^C) = \operatorname{im}(d_{n+1}^C)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist.
- zusammenziehbar, falls der Identitätsmorphismus $\mathrm{id}_{C_\bullet}$ homotop zur Nullabbildung ist.

Sei nun $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln, aufgefasst als Kettenkomplex (wir füllen also mit 0en auf). Zeigen Sie, dass ein solcher Kettenkomplex genau dann zusammenziehbar ist, wenn die kurze exakte Sequenz spaltet.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Sei X ein topologischer Raum und sei m eine feste ganze Zahl.

(i) Weisen Sie nach, dass die Multiplikation mit m einen Morphismus

$$\mu_m \colon C_\bullet^{\text{sing}}(X) \to C_\bullet^{\text{sing}}(X)$$

von Kettenkomplexen definiert.

(ii) Zeigen Sie, dass für jede ganze Zahl n eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker}(H_n^{\text{sing}}(\mu_m) \longrightarrow H_n^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \longrightarrow \ker(H_{n-1}^{\text{sing}}(\mu_m) \longrightarrow 0$$

von abelschen Gruppen existiert.

bitte wenden

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Topologie I, WiSe 22/23
Blatt 4

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Sei (E_*, ∂_*) eine Homologietheorie mit Werten in R-Mod und seien $X_1, \dots, X_r$ topologische Räume. Zeigen Sie, dass die Inklusionen $i_j \colon X_j \to \coprod_{k=1}^r X_k$ der Summanden Isomorphismen

$$\bigoplus_{k=1}^{r} E_n(X_k) \to E_n(X)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ induzieren. In anderen Worten, Homologietheorien respektieren endliche Koprodukte.