Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Topologie I, WiSe 22/23
Blatt 5

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Begründen Sie, dass man das Ausschneidungsaxiom auch wie folgt formulieren kann:
Sind A und B Unterräume eines topologischen Raumes X mit $\mathring{A} \cup \mathring{B} = X$, so sind die von der Inklusion $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ induzierten Abbildungen $H_n(B, A \cap B) \to H_n(X, A)$ Isomorphismen für alle ganzen Zahlen n.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Sei R ein (kommutativer) Ring (mit 1) und sei (E_*, ∂_*) eine Homologietheorie mit Werten in R-Mod. Zeigen Sie, dass $E_n(\emptyset) = 0$ ist für alle ganzen Zahlen n. Folgern Sie, dass auch stets $E_n(X, X) = 0$ ist für jeden topologischen Raum X.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Sei R ein (kommutativer) Ring (mit 1) und sei (X, A) ein Raumpaar. Zeigen Sie, dass die Homologiegruppe $H_1(X, A; R)$ genau dann trivial ist, wenn die von der Inlusion $A \hookrightarrow X$ induzierte Abbildung $H_1(A; R) \to H_1(X; R)$ surjektiv ist und keine Wegzusammenhangskomponente von X mehr als Wegzusammenhangskomponente von A enthält.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
In der Vorlesung haben wir eine Erweiterung des baryzentrischen Zerteilungsoperators auf den singulären Kettenkomplex betrachtet, welcher mit $B(X)_*$ bezeichnet wurde. Wir haben dann nachgerechnet, dass $B(X)_* \colon C_*(X; R) \to C_*(X; R)$ ein Morphismus von Kettenkomplexen ist und behauptet, dass dieser vermöge einer Homotopie $h(X)_*$ homotop zur Identität ist. Hierbei ist diese Homotopie auch eine Erweiterung einer Homotopie h_* auf der ebene der affine Simplexe. Weisen Sie diese Behauptung im Detail nach.