Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Topologie I, WiSe 22/23
Blatt 6

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Geben Sie ein Beispiel eines topologischen Raumes X zusammen mit zwei Punkten $x, x' \in X$ an, sodass (X, x) wohlpunktiert ist und (X, x') nicht.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Wir betrachten die stetige Abbildung $f_n \colon S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ für eine ganze Zahl n. Zeigen Sie, dass der davon induzierte Endomorphismus auf der ersten Homologie $H_1(S_1) \cong \mathbb{Z}$ die Multiplikation mit n ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
In der Vorlesung haben wir die reduzierte singuläre Homologie $\tilde{H}_n(X) = \ker(H_n(X) \to H_n(\mathrm{pt}))$ eines topologischen Raumes X eingeführt. Kann man diese auch als Homologie eines Kettenkomplexes definieren?

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Sei R ein (kommutativer) Ring (mit 1) und seien $C_\bullet$ und $D_\bullet$ zwei Kettenkomplexe von R-Moduln. Wir definieren das Tensorprodukt $C_\bullet \otimes D_\bullet$ als den Kettenkomplex gegeben durch $\bigoplus_{i+j=n} C_i \otimes D_j$ in Grad n mit Differentialen gegeben durch

$$\partial_n^{C_\bullet \otimes D_\bullet}(c \otimes d) = (\partial_i^{C_\bullet}(c) \otimes d) + (-1)^i (c \otimes \partial_j^{D_\bullet}(d))$$

auf Elementen $c \otimes d \in C_i \otimes D_j$ mit $i + j = n$.

(i) Weisen Sie nach, dass obige Konstruktion wirklich eine Kettenkomplex definiert.

(ii) Wir betrachten nun den Kettenkomplex

$$I_\bullet = \quad \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id} \times -\mathrm{id}} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

wobei $\mathbb{Z}^2$ in Grad 0 lebt. Rechnen Sie nach, dass das Tensorprodukt $C_\bullet \otimes I_\bullet$ für einen beliebigen Kettenkomplex in Grad n durch $C_n \oplus C_n \oplus C_{n-1}$ gegeben ist. Es tauchen also zwei Kopien von $C_\bullet$ in $C_\bullet \otimes I_\bullet$ auf.

(ii) Seien nun $f_\bullet, g_\bullet \colon C_\bullet \to D_\bullet$ zwei Morphismen von Kettenkomplexen. Zeigen Sie, dass ein Morphismus $C_\bullet \otimes I_\bullet \to D_\bullet$ von Kettenkomplexen, welcher eingeschränkt auf die beiden Kopien von $C_\bullet$ mit $f_\bullet$ bzw. $g_\bullet$ übereinstimmt, dasselbe ist, wie eine Homotopie $f_\bullet \simeq g_\bullet$.