Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Topologie I, WiSe 22/23
Blatt 8

Sei R ein Ring und sei (E_*, ∂_*) eine Homologietheorie mit Werten in R-Mod.

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Wir nehmen nun zusätzlich an, dass (E_*, ∂_*) eine gewöhnliche Homologietheorie ist, also das Dimensionsaxiom erfüllt. Verwenden Sie die Mayer-Vietoris Sequenz für Pushouts, um

(i) $E_*(S^n)$ auszurechnen.

(ii) mit Hilfe Ihrer Berechnung aus dem ersten Aufgabenteil $E_*(T^2)$ auszurechnen.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Verwenden Sie Ihre Resultate aus der ersten Aufgabe um zu zeigen, dass die Kollabierabbildung $S^1 \times S^1 \to S^2$, welche $S^1 \vee S^1$ zu einem Punkt zusammenschlägt, nicht nullhomotop ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Sei X ein topologischer Raum. Wir wollen zeigen, dass es stets einen natürlichen Isomorphismus

$$E_*(X \times S^n) \cong E_*(X) \oplus E_{*-n}(X)$$

gibt. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Finden Sie zunächst einen Isomorphismus $E_*(X \times S^n) \cong E_*(X) \oplus E_*(X \times S^n, X \times \{s_0\})$ für einen Punkt $s_0 \in S^n$.

(ii) Nutzen Sie nun Mayer-Vietoris, um $E_*(X \times S^n, X \times \{s_0\}) \cong E_{*-n}(X)$ zu zeigen.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Wir nehmen nun zusätzlich an, dass (E_*, ∂_*) eine gewöhnliche Homologietheorie ist, also das Dimensionsaxiom erfüllt. Weisen Sie nach, dass $E_*(T^n) \cong E_0(\mathrm{pt})^{\binom{n}{*}}$ ist.