

Topologie I

Holger Kammeyer (holger.kammeyer@hhu.de)

Inhalte:

I Homologie: Ideen und Axiome

1. Höhere Homotopiegruppen
2. Die Idee der Homologie
3. Simpliciale Homologie
4. Relative simpliciale Homologie mit Koeffizienten
5. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome

II Singuläre Homologie

1. Die Definition der singulären Homologie
2. Die lange exakte Folge eines Raumpaares
3. Homotopieinvarianz
4. Ausschneidung
5. Singuläre Homologie in Grad null und eins

III Homologie: Berechnung und Anwendungen

1. Relative und absolute Homologie
2. Gleichheit von simplicialer und singulärer Homologie
3. Die Mayer-Vietoris-Folge
4. Der Abbildungsgrad
5. Anwendungen

IV Zellkomplexe und zelluläre Homologie

1. Zellkomplexe
2. Zelluläre Homologie und Eulercharakteristik
3. Berechnung zellulärer Homologie
4. Eindeutigkeit gewöhnlicher Homologie
5. Wie geht es weiter?

Lizenz: CC BY-SA 3.0 DE

<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/>

I Homologie: Ideen und Axiome

I.1 Höhere Homotopiegruppen

Erinnerung: Sei (X, x_0) punktierter Raum.
Dann ist

$$\pi_1(X, x_0) = \left\{ \gamma: (I, \{0, 1\}) \rightarrow (X, x_0) \right\} \simeq_{\{0, 1\}}$$

mit $[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] = [\gamma_1 \gamma_2]$, wobei

$$\gamma_1 \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t-1) & \text{für } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

die **Fundamentalgruppe** von (X, x_0) .

Bsp. $\pi_1(S^1, \cdot) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbb{T}^n, \cdot) \cong \mathbb{Z}^n$,
 $\pi_1(\Sigma_g, \cdot) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \rangle$,
 $\pi_1(S^n, \cdot) \cong 1$ für $n \geq 2$.

Gilt $S^2 \cong S^3$? $\pi_1(S^2 \setminus \{x_0, x_1\}) \cong \pi_1(S^1, \cdot) \cong \mathbb{Z}$,
 $\pi_1(S^3 \setminus \{x_0, x_1\}, \cdot) \cong \pi_1(S^2, \cdot) \cong 1$,
also nein.

Suchen Verallgemeinerung " π_n ". Idee: Sei $\partial I^n = I^n \setminus (0, 1)^n$.

Def. I.1.1 Die **n -te Homotopiegruppe** ist die Menge

$$\pi_n(X, x_0) = \left\{ f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0) \right\} / \simeq_{\partial I^n}$$

mit Verknüpfung $[f] \cdot [g] = [fg]$, wobei

$$fg(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(2x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{für } 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ f(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n) & \text{für } \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1. \end{cases}$$

Geometrische Alternative: Wegen $I^n / \partial I^n \cong S^n$ gilt

$$(I^n, \partial I^n) \xrightarrow{f} (X, x_0) \text{ und } f \mapsto \bar{f} \text{ ist eine Bijektion.}$$

Also $\pi_n(X, x_0) = \text{Hom}_{\text{HoTop.}}((S^n, \cdot), (X, x_0))$

$$(S^n, \cdot) \xrightarrow{\bar{f}} \text{ und } [\bar{f}] \cdot [\bar{g}] = [S^n \xrightarrow{\text{Äquator kollabieren}} S^n \vee S^n \xrightarrow{\bar{f} \vee \bar{g}} X]$$

Wie zuvor gilt für $n \geq 1$:

- $\pi_n(X, x_0)$ ist eine Gruppe

- π_n ist ein Funktor,

der über HoTop. faktorisiert:

$$\text{Top.} \xrightarrow{\pi_n} \text{Group.} \quad \begin{matrix} \nearrow \text{HoTop.} \\ \searrow \pi_n \end{matrix}$$

Nun ist aber:

Satz I.1.2 Für $n \geq 2$ ist $\pi_n(X, x_0)$ abelsch.

Bew. $n=2$:

$$x_1 \begin{array}{|c|c|} \hline f & g \\ \hline \end{array} \underset{x_0}{\approx} \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{f} & \boxed{g} \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{g} & \boxed{f} \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|c|} \hline g & f \\ \hline \end{array}, \quad n \geq 2 \text{ genauso. } \square$$

Es gilt

$$\pi_k(S^n, \cdot) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k=n \\ 0 & \text{für } k < n \end{cases}$$

(Beweis später) und z.B. $\pi_3(S^2, \cdot) \cong \langle \gamma \rangle \cong \mathbb{Z}$, mit dem

Hopf-Bündel

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{\sim} S^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$(z_1, z_2) \mapsto z_1/z_2$$

Berechnung schwer. Die Gruppen $\pi_n(S^2, \cdot)$ sind für $n \geq 2$ nur zum Teil bekannt. Problem: $\pi_1: \text{Top.} \rightarrow \text{Groups}$ erhält geeignete Pushouts:

$$\begin{array}{ccc} A \longrightarrow Y & & \pi_1(A, \cdot) \longrightarrow \pi_1(Y, \cdot) \\ \text{Kofaserung} \rightarrow \downarrow \quad \downarrow & \leadsto & \downarrow \quad \downarrow \\ X \longrightarrow Z & & \pi_1(X, \cdot) \longrightarrow \pi_1(Z, \cdot), \end{array}$$

aber $\pi_n: \text{Top.} \rightarrow \text{Ab}$ für $n \geq 2$ nicht,
z.B. $|\pi_4(S^2 \vee S^2, \cdot)| = \infty$, aber $|\pi_4(S^2, \cdot)| < \infty$.

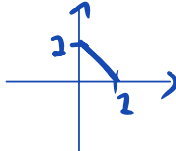
→ Suchen Invariante, die "höherdimensionale" Objekte unterscheidet und leicht(er) zu berechnen ist. → Homologie!

I.2 Die Idee der Homologie

"Grundbaustein" vieler top. Räume ist das
Standard- n -Simplex

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}$$

$n=0$: 

$n=1$: 

$n=2$: 

$n=3$: 

Äquivalent: Δ^n ist die **konvexe Hülle** der Standardbasis, $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ Notation:

$$\Delta^n = [v_0, v_1, \dots, v_n].$$

Wir nennen v_i das i -te **Vertex** (Pl. Vertices) von Δ^n und $[v_0, \dots, \overset{\text{weggelassen}}{\hat{v}_i}, \dots, v_n]$ die i -te **Seite**.



Geometrisch liegt die i -te Seite "gegenüber" des i -ten Vertex.
Vereinbarung: $[v_0]$ hat $\emptyset$ als einzige Seite.

Viele relevante top. Räume (z.B. glatte Kfz.) lassen man durch "Verkleben" von Simplexen erhalten:



1-Zykel, der kein Rand ist.

- Eine **n -Kette** sei eine Wahl endlich vieler n -Simplexe (entspricht später einer n -Kette mit Koeff. in $\mathbb{Z}/2$)
- Ein **n -Rand** ist der "Rand" einer $(n+1)$ -Kette, (die n -Kette, die aus den Seiten der Simplexe der $(n+1)$ -Kette besteht, an denen keine gerade Zahl (meist zwei) von Simplexen anliegt.)

- Ein n -Zykel ist eine n -Kette mit leerem Rand
- Jeder n -Rand ist ein n -Zykel (denn der Rand des Randes eines $(n+1)$ -Simplex ist leer).
- Die n -te Homologie misst die Abweichung von der Umkehrung:

$$H_n(X; \mathbb{Z}/2) = \{n\text{-Zykel}\} / \{n\text{-Ränder}\},$$

d.h. wir identifizieren zwei n -Zykel, wenn sie gemeinsam den Rand einer $(n+1)$ -Kette bilden (wenn sie homolog sind):



Schon zu erwähnen: es gibt Bezüge zwischen π_n und H_n (aber auch große Unterschiede, z.B.

$$H_k(S^n; \mathbb{Z}/2) = 0 \text{ für } k > n \text{ nach Def.})$$

I.3 Simpliciale Homologie

Ziel: Präzisierung der obigen Begriffsbildung ($\mathbb{Z}$ statt $\mathbb{Z}/2$!)

Seien $\partial \Delta^n := \bigcup_{i=0}^n [v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ und $\dot{\Delta}^n = \Delta^n \setminus \partial \Delta^n$

Rand und Inneres des n -Simplex'.

Def 13.1 Ein Δ -Komplex ist ein top. Raum X mit einer Familie von Abb. $\{\sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X\}$ für jedes $n \geq 0$, s.d.:

(i) Jede Abb. $\sigma_\alpha|_{\Delta^n}$ ist injektiv.

(ii) Jeder Punkt $x \in X$ liegt in Bild von $\sigma_\alpha|_{\Delta^n}$ für genau ein σ_α .

(iii) Jede Einschränkung $\sigma_\alpha|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$ ist gleich einem σ_{β^i} , wenn wir $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ mit $[v_0, \dots, v_{n-1}]$ identifizieren durch den eindeutigen linearen Homöo., der die Ordnung der Vertices erhält. (Fortan so vereinbart.)

(iv) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist offen, g.d.w. $(\sigma_\alpha)^{-1}(A) \subseteq \Delta^n$ offen ist für alle σ_α .

- Wir nennen $\sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X$ ein n -Simplex des Δ -kpx' X .
- Wir haben eine Filtrierung $X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq X^n \subseteq \dots \subseteq X$ durch n -Gerüste (oder n -Skelette),

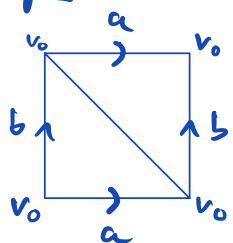
$$X^n = \bigcup_{\sigma_\alpha} \text{Bild}(\sigma_\alpha).$$

- $\dim X = \ell$, falls $X^\ell = X$ und $X^{\ell-1} \neq X$
- $\dim X = \infty$, falls es kein solches ℓ gibt.
- X habe endlichen Typ, falls es für jedes n nur endlich viele n -Simplexe gibt.
- X sei endlich, falls es nur endlich viele Simplexe insgesamt gibt.

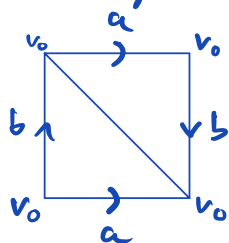
Def. I.3.2 Ein **Simplizialkomplex** ist ein Δ -Komplex, bei dem jeder Simplex durch seine Vertices bestimmt ist.

$\leadsto$ kombinatorische Beschreibung möglich
(**abstrakter Simplizialkomplex**)

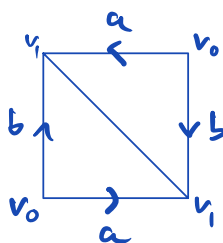
Bsp. von Δ -Komplexen



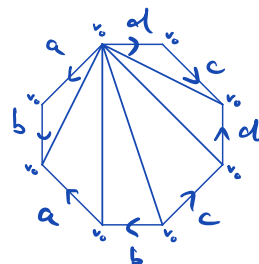
Torus $\mathbb{T}^2$



Klein'sche
Flasche K



reelle proj.
Ebene $\mathbb{RP}^2$



or.b. Fläche
von Geschlecht 2
 Σ_2

Beachte: $\mathbb{T}^2$ als Simp. Kpx. hat mindestens 14 2-Simplexe,
21 1-Simplexe und 7 Vertices!

Def. I.3.3 Sei X ein Δ -Komplex. Der n -te **simpliziale Kettenmodul** $C_n^\Delta(X)$ ist der freie $\mathbb{Z}$ -Modul mit Basis $\{\sigma_\alpha^n: \Delta^n \rightarrow X\}$.

Formal: der Verginfunctor $\gamma: \underline{\mathbb{Z}\text{-Mod}} \rightarrow \underline{\text{Set}}$
hat ein Linksadjungiertes $F: \underline{\text{Set}} \rightarrow \underline{\mathbb{Z}\text{-Mod}}$ und
 $C_n^\Delta(X) := F(\{\sigma_\alpha^n: \Delta^n \rightarrow X\})$.

Elemente von $C_n^\Delta(X)$ sind also formale $\mathbb{Z}$ -Linear-
kombinationen $\sum_\alpha k_\alpha \sigma_\alpha^n \in C_n^\Delta(X)$, wobei $k_\alpha = 0$
für fast alle α , und heißen **n -Ketten**

Def. I.3.4 Die n -te Randabbildung (oder Differential)

ist der Homomorphismus

$$\partial_n: C_n^\Delta(X) \rightarrow C_{n-1}^\Delta(X)$$

$$\sigma_\alpha^n \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_\alpha^n | [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

Wir setzen noch formal $C_n^\Delta(X) = 0$ für $n < 0$,
also $\partial_n = 0$ für $n \leq 0$.

Lemma I.3.5 Es gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Bew.

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_\alpha^n | [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \right) &= \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \left(\sum_{j < i} (-1)^{j+i} \sigma_\alpha^n | [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j > i} (-1)^{i+j-1} \sigma_\alpha^n | [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n] \right) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Nach dem Lemma ist $(C_*^\Delta(X), \partial_*)$ ein Kettenkomplex,
also eine Folge von R -Modulen C_* über einem
kommutativen Ring mit 1 (in unserem Fall $R = \mathbb{Z}$)
mit Homomorphismen

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots,$$

sodass $\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$, oder äquivalent $\text{Bild } \partial_{n+1} \subseteq \text{Ker } \partial_n$
oder in Worten „ n -Ränder sind n -Zykel.“

Def. I.3.6 Die n -te Homologie eines Kettenkomplexes (C_*, ∂_*) ist der $\mathbb{R}$ -Modul

$$H_n(C_*) = \text{Ker } \partial_n / \text{Bild } \partial_{n+1}$$

Def. I.3.7 Die n -te simpliziale Homologie eines Δ -Komplexes X ist der $\mathbb{Z}$ -Modul

$$H_n^\Delta(X) = H_n(C_*^\Delta(X)).$$

Zwei n -Zykel $z_1, z_2 \in Z_n(X) := \text{Ker } \partial_n$ definieren also dieselbe Homologieklassen $[z_1] = [z_2] \in H_n^\Delta(X)$, wenn $z_2 - z_1 \in B_n(X) := \text{Bild } \partial_{n+1}$ ein n -Rand ist.

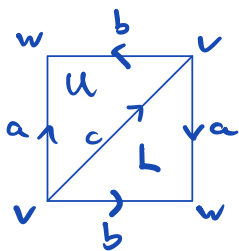
Bsp. 1) $X = S^1 = \bigcirc^e$

$$C_*^\Delta(X) = \cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}e \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}v \rightarrow 0,$$

$\partial_1(e) = v - v = 0$, d.h. der Kettenkomplex hat nur triviale Differentiale und deshalb $H_*^\Delta(X) = C_*^\Delta(X)$, also

$$H_k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0, 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bsp. 2.) $X = \mathbb{RP}^2$



Aus den Pfeilrichtungen ergeben sich die Abb. $\sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X$.

$$\begin{aligned} \partial_2(u) &= -a + b + c & \partial_1(a) &= -v + w \\ \partial_2(L) &= a - b + c, & \partial_1(b) &= -v + w \\ & & \partial_1(c) &= v - v = 0 \end{aligned}$$

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow[\partial_2]{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow[\partial_1]{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2 \rightarrow 0$$

Aus $\partial_2 \left(\begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix} \right) = 0$ folgt ($u = m$ und $2u = 0$),
also $\begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit $Z_2(X) = 0$ und $H_2^A(X) = 0$.

Es gilt $\partial_1 \left(\begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \right) = 0$ g.d.w. $k = -l$, also

$$\text{Ker } \partial_1 = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ -k \\ m \end{pmatrix} : k, m \in \mathbb{Z} \right\} \text{ und wir haben}$$

$$\partial_2 \left(\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -r+s \\ r-s \\ r+s \end{pmatrix}. \text{ Setzen } p = -r+s \text{ und daher}$$

$$\text{Bild}(\partial_2) = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ -p \\ p+2q \end{pmatrix} : p, q \in \mathbb{Z} \right\}. \text{ Mit } m = k+m'$$

erkennen wir $H_1^A(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Schließlich folgt
aus $\text{Bild}(\partial_1) = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix} : k \in \mathbb{Z} \right\}$, dass $H_0^A(X) \cong \mathbb{Z}$

erzeugt von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Bild}(\partial_1)$. Zusammenfassend:

$$H_2^A(\mathbb{RP}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0 \\ \mathbb{Z}/2 & k=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein algorithmisches Verfahren zur Bestimmung der Homologie eines Kettenkomplexes freier Module mit endlichem Rang über einem Hauptidealring (HIR) R liefert die Smith-Normalform: Zu $A \in \text{Mat}(k, l; R)$ gibt es $S \in \text{GL}(l, R)$ und $T \in \text{GL}(k, R)$, sodass

$$SAT = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & a_n & & & \\ 0 & & & \ddots & & \\ & & 0 & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{mit } n \leq \min\{k, l\}. \\ \text{und } a_1 | a_2 | \dots | a_n, \\ a_i \neq 0. \end{array}$$

Die a_i heißen **Invariante Faktoren** und sind eindeutig bis auf Assoziation. Also haben auch Homomorphismen abstrakter freier R -Module mit endl. Rang wohldefinierte invariante Faktoren.

Lemma I.3.8 Sei $C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$ ein Kettenkomplex von freien R -Modulen mit endlichem Rang über einem HIR R . Dann gilt

$$H_1(C_*) \cong R^b \oplus R/(a_1) \oplus \dots \oplus R/(a_n),$$

wobei a_i die inv. Faktoren von ∂_2 bezeichnen und $b = \text{Rang}(\text{Ker } \partial_1) - n$

Bew. $C_1^0 := \ker \partial_1$ ist frei und hat ein freies Komplement C_1' ,
 sodass $C_1 = C_1^0 \oplus C_1'$. Finde Basen von C_2 und C_1^0 ,
 sodass $\partial_2: C_2 \rightarrow C_1^0$ Smith-Normalform hat. Wähle
 Basis von C_1' und C_0 beliebig. Mit der zugehörigen
 Matrixdarstellung von ∂_2 und ∂_1 ist das Lemma klar. $\square$

I.4 Relative simpliziale Homologie mit Koeffizienten

Ziel: Für einen kommutativen Ring R mit 1 und
 einen Teilkomplex $A \subseteq X$, erkläre $H_n^\Delta(X, A; R)$.

Def. I.4.8 Sei X ein Δ -Komplex. Ein **Teilkomplex**
 (oder **Unterkomplex**) ist ein Teilraum $A \subseteq X$, der
 Vereinigung von Simplexen ist. (X, A) heißt **Δ -Paar**.

Notiz. Weil $(\sigma_a^n)^{-1}(A)$ Vereinigung von Teilsimplex
 von Δ^n ist, ist ein Teilkomplex $A \subseteq X$ immer
 abgeschlossen.

Def. I.4.9 Der n -te **relative simpliziale Kettenmodul**
 von (X, A) ist der Faktormodul $C_n^\Delta(X, A) = C_n^\Delta(X) / C_n^\Delta(A)$.

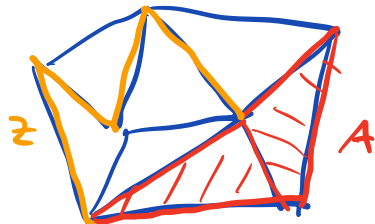
Wegen $\partial_n(C_n^\Delta(A)) \subseteq C_{n-1}^\Delta(A)$, erhalten wir

$$\partial_n: C_n^\Delta(X, A) \rightarrow C_{n-1}^\Delta(X, A)$$

und noch immer gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, d.h.

$(C_*^\Delta(X, A), \partial_*)$ ist ein Kettenkomplex.

Ein **relativer Zykel** $z \in Z_n(X, A) := \ker \partial_n$ ist nur eine Kette mit Rand in A :



Def. I.4.10 Die n -te **relative simpliziale Homologie** eines Δ -Paares (X, A) ist der $\mathbb{Z}$ -Modul

$$H_n^\Delta(X, A) = H_n(C_*^\Delta(X, A)).$$

Bsp.: Sei $X = \Delta^n$, $A = \partial\Delta^n$ mit der kanonischen Δ -Struktur. Dann gilt

$$C_k^\Delta(X, A) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=n \\ 0 & k \neq n \end{cases}.$$

Insbesondere verschwinden alle Differenziale und somit gilt auch

$$H_k^\Delta(X, A) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=n \\ 0 & k \neq n \end{cases}.$$

Sei nun R ein kommutativer Ring mit 1 und $C_n^\Delta(X; R)$ der freie R -Modul mit Basis $\{\sigma_\alpha^n: \Delta^n \rightarrow X\}$. Wegen $1 \in R$ gibt es auch $-1 \in R$, somit gibt es auch $\partial_n: C_n^\Delta(X, R) \rightarrow C_{n-1}^\Delta(X, R)$

wie in Def. I.3.4. Setze

$$C_n^\Delta(X, A; R) = C_n^\Delta(X; R) / C_n^\Delta(A; R)$$

und wegen $\partial_n(C_n^\Delta(A; R)) \subseteq C_{n-1}^\Delta(A; R)$ bilden diese Moduln einen Kettenkomplex von freien R -Moduln (die Simplexe in $\{\sigma_\alpha^n: \Delta^n \rightarrow X\}$, deren Bild nicht in A liegt, bilden eine Basis.). Wir erhalten die n -te **relative Homologie mit Koeff. in R**

$$H_n^\Delta(X, A; R) = H_n(C_*^\Delta(X, A; R)).$$

Wir definieren $C_n^\Delta(X; R) := C_n^\Delta(X, \emptyset; R)$ und $H_n^\Delta(X; R) := H_n^\Delta(X, \emptyset; R)$ und beobachten $H_n^\Delta(X; \mathbb{Z}) = H_n(X)$.

Bsp.: $X = \mathbb{RP}^2$, $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (ein Körper, d.h. R -Moduln sind Vektorräume $\leadsto$ Ergebnisse der L.A. sind anwendbar!)

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Rang}(\partial_2) = 1$, $\text{Rang}(\partial_1) = 1$. Mit dim.-Formel:

$$H_k(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & k=0, 1, 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Intuition: $H_n^\Delta(X, A; R)$ misst, wie sehr $H_n^\Delta(X; R)$ von $H_n^\Delta(A; R)$ abweicht. Wollen präzisieren.

Def. I.4.11 Eine Folge $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ von Morphismen in R -Mod heißt **exakt** an der Stelle B , falls $\text{Ker } g = \text{Bild } f$.

Beachte: $\cdot$ g injektiv $\Leftrightarrow f=0$
 $\cdot$ f surjektiv $\Leftrightarrow g=0$.

Eine **lange exakte Folge (LES)** in R -mod ist eine Folge

$\dots \rightarrow A_{n+1} \rightarrow A_n \rightarrow A_{n-1} \rightarrow \dots$,
 die an jeder Stelle exakt ist.

Satz I.4.12 (LES) Zu einem Δ -Paar (X, A) gibt es eine lange exakte Folge

$$\dots \xrightarrow{d_{n+1}} H_n^\Delta(A; R) \xrightarrow{i_n} H_n(X; R) \xrightarrow{j_n} H_n(X, A; R) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(A; R) \rightarrow \dots$$

Hierbei ist $\begin{cases} i_n \\ j_n \\ d_n \end{cases}$ induziert von $\begin{cases} z_n^\Delta(A) \rightarrow z_n^\Delta(X) \\ z_n^\Delta(X) \rightarrow z_n^\Delta(X, A) \\ z_n^\Delta(X, A) \xrightarrow{\partial_n} z_{n-1}^\Delta(A) \end{cases}$.

(Wir unterdrücken oft den Koeffizientenring R in der Notation.)

Bew.: Exakt an der Stelle $H_n^\Delta(A)$: Sei $z \in B_n^\Delta(A) \in \text{Ker } i_n$. Dann gibt es $c \in C_{n+1}^\Delta(X)$ mit $\partial c = z$,

also $c \in Z_{n+1}^A(X, A)$ und $d_{n+2}(c + B_{n+2}^A(X, A)) = z + B_n^A(A)$. Sei umgekehrt $z + B_n^A(A) \in \text{Bild } d_{n+2}$. Dann gibt es $c \in Z_{n+2}^A(X, A)$ mit $\partial c = z$, also $z \in B_n^A(X)$, d.h. $i_n(z + B_n^A(A)) = 0$.

Exakt an der Stelle $H_n^A(X; R)$: Sei $z + B_n^A(X) \in \ker j_n$. Dann gilt $z \in B_n^A(X, A)$, d.h. es gibt $c \in C_{n+1}^A(X)$ mit $z - \partial c \in C_n^A(A)$ und wegen $\partial(z - \partial c) = \partial z = 0$ sogar $z - \partial c \in Z_n^A(A)$. Wir erhalten $i_n(z - \partial c + B_n^A(A)) = z - \partial c + B_n^A(X) = z + B_n^A(X)$. Sei umgekehrt $z + B_n^A(X) \in \text{Bild } i_n$. Dann gibt es $c \in C_{n+1}^A(X)$, sodass $z - \partial c \in Z_n^A(A)$, also $z \in B_n^A(X, A)$, d.h. $j_n(z + B_n^A(X)) = 0$.

Exakt an der Stelle $H_n^A(X, A)$: selbst. $\square$

Kor. I.4.23

$$(H_n^A(X, A) = 0 \text{ f\"ur } n \geq 0) \Leftrightarrow (H_n^A(A) \xrightarrow{i_n} H_n^A(X) \text{ f\"ur } n \geq 0). \quad \square$$

Frage: Gilt stets $H_n^A(A) \subseteq H_n^A(X)$ und $H_n(X, A) \cong H_n(X) / H_n(A)$?

Antwort: Nein, sondern nur wenn $d_{n+1} = 0$ und $d_n = 0$. Dann ist

$$0 \rightarrow H_n^A(A) \rightarrow H_n^A(X) \rightarrow H_n^A(X, A) \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Folge (SES).

Frage: Gilt in diesem Fall stets $H_n^A(X) \cong H_n^A(A) \oplus H_n^A(X, A)$?

Antwort: Nein, nur wenn die SES zerfällt:

Lemma I.4.25 (Zerfällungslemma) Sei

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Folge von R -Modulen. Dann sind äquiv.:

(i) Es gibt $p: B \rightarrow A$ mit $p \circ i = \text{id}_A$.

(ii) Es gibt $s: C \rightarrow B$ mit $j \circ s = \text{id}_C$.

(iii) Es gibt einen Iso. $B \cong A \oplus C$, od.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C \rightarrow 0 \\ & & & \searrow & \downarrow \text{id} & \nearrow & \\ & & & A \oplus C & \xrightarrow{p \oplus j} & C & \end{array} \quad \text{kommutiert.}$$

Bew. (iii) $\Rightarrow$ (i) und (iii) $\Rightarrow$ (ii) sind klar.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): z.z. $B \cong \text{Bild}(i) \oplus \text{Bild}(s)$. Wir zerlegen dazu $b = (b - s(j(b))) + s(j(b))$, wobei $b - s(j(b)) \in \ker(j) = \text{Bild}(i)$. Falls $b \in \text{Bild}(i) \cap \text{Bild}(s)$, gilt $b = s(j(b'))$ für ein $b' \in B$. Weil $\text{Bild}(i) = \ker(j)$, gilt $0 = j(b) = j(s(j(b'))) = j(b')$, also $b = s(j(b')) = s(0) = 0$.

(i) $\Rightarrow$ (iii): z.z.: $B \cong \text{Bild}(i) \oplus \ker(p)$. Dazu $b = (b - i(p(b))) + i(p(b))$ und aus $b \in \text{Bild}(i) \cap \ker(p)$ folgt $b = i(p(a))$ für ein $a \in A$ und $0 = p(b) = p(i(p(a))) = p(a)$, also $b = i(p(a)) = i(0) = 0$.

Noch z.z. $\ker p \cong C$: für jedes $c \in C$ gibt es $b \in B$ mit $j(b) = c$ und $b = i(a) + \overset{\in \ker p}{k}$, also $j(b) = j(i(a) + k) = j(k)$. Falls $k \in \ker p \cap \ker j$, folgt $k = 0$, weil $\ker j = \text{Bild}(i)$, d.h. $j|_{\ker p} \xrightarrow{\cong} C$. $\square$

Notiz. • Wegen (ii) zerfällt eine SES immer, wenn C ein freier R -Modul ist.

• Das Zerfallungslemma gilt nicht in Group. Bsp.:

Für $1 \rightarrow A_3 \rightarrow S_3 \xrightarrow{\text{Zn}} \{\pm 1\} \rightarrow 1$
gilt (ii), aber nicht (i), weil man $\{\pm 1\}$ nicht zu einem Normalteiler in S_3 hochheben kann.

Satz I.4.26 (Ausschneidung). Sei X ein Δ -Komplex und seien $A \subseteq Y \subseteq X$ Unterkomplexe mit $A \subseteq \overset{\circ}{Y} \leftarrow \text{Inneres}$.

Dann induziert die Inklusion von Δ -Paaren

$$(X \setminus \overset{\circ}{A}, Y \setminus \overset{\circ}{A}) \xrightarrow{j} (X, A)$$

für alle $n \geq 0$ Isomorphismen

$$H_n^\Delta(X \setminus \overset{\circ}{A}, Y \setminus \overset{\circ}{A}; R) \xrightarrow{\cong} H_n^\Delta(X, A; R).$$

Bew. Zeigen stärker, dass j einen Iso.

$$C_*^\Delta(X \setminus \overset{\circ}{A}, Y \setminus \overset{\circ}{A}; R) \xrightarrow{j_*} C_*^\Delta(X, Y; R)$$

von Kettenkomplexen stiftet. Die Kommutativität

$j_{n-1} \circ \partial_n = \partial_n \circ j_n$ ist klar. Zeigen j_* ist surjektiv:

Sei dazu $c \in C_n^\Delta(Y) \in C_n^\Delta(X, Y)$ und o.B.d.A. habe

c keine Simplexe in Y . Weil $X \setminus Y \subseteq X \setminus \overset{\circ}{A}$, ist

$c \in C_n^\Delta(Y \setminus \overset{\circ}{A})$ ein Urbild unter j_* . Zeigen j_* ist

injektiv: Sei $c \in C_n^\Delta(Y \setminus \overset{\circ}{A}) \in \ker j_*$. Dann gilt

$$c \in C_n^\Delta((X \setminus \overset{\circ}{A}) \cap Y) = C_n^\Delta(Y \setminus \overset{\circ}{A}).$$

□

I.5 Die Eilenberg-Steenrod-Axiome

Ziel: Axiomatische Beschreibung der Homologie.

Nachteile simplizialer Homologie:

- nur für Δ -Paare definiert
- Kategorie der Δ -Paare ist „unhandlich“, wenn $H_n^A: \underline{\Delta\text{-pairs}} \rightarrow \underline{R\text{-mod}}$ ein Funktor werden soll
- Unklar, ob aus $f = g$ auch $H_n^A(f) = H_n^A(g)$ folgt.

Daher folgende Wunschliste:

Homologie soll eine Familie von Funktoren

$$H_n: \underline{\text{Top}}^{(2)} \rightarrow \underline{R\text{-mod}} \text{ sein mit}$$

1.)
$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \underline{HoTop}^{(2)} & \searrow \\ \underline{Top}^{(2)} & \xrightarrow{H_n} & \underline{R\text{-mod}}, \end{array}$$

2.) einer LES für jedes Raumpaar (X, A) ,

3.) einem Ausschneidungsiso. für $A \subseteq Y \subseteq X$, od. $\bar{A} \subseteq \overset{\circ}{Y}$.

Def. I.5.1 Eine **Homologietheorie** mit Werten in $\underline{R\text{-mod}}$ ist eine Familie von Funktoren $(H_n)_{n \in \mathbb{Z}}$,

$$H_n: \underline{Top}^{(2)} \rightarrow \underline{R\text{-mod}}$$

mit einer Familie natürlicher Transformationen

$$\partial_n: H_n \rightarrow H_{n-1} \circ J,$$

wobei $J: \underline{Top}^{(1)} \rightarrow \underline{Top}^{(2)}$, $J(X, A) = (A, \emptyset)$,

$J(f: (X, A) \rightarrow (Y, B)) = f|_A: (A, \emptyset) \rightarrow (B, \emptyset)$, od.

1.) Homotopieinvarianz. Falls für $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ gilt $f \simeq_h g$ mit $h_t(A) \subseteq B$ für alle $t \in I$, dann $H_n(f) = H_n(g)$.

2.) LES. Zu (X, A) gehören die Inklusionen $i: (A, \emptyset) \rightarrow (X, \emptyset)$ und $j: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ und diese induzieren die LES

$$\cdots \rightarrow H_n(A, \emptyset) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X, \emptyset) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n(X, A)} H_{n-1}(A, \emptyset) \rightarrow \cdots$$

3.) Ausschneidung. Seien $A, Y \subseteq X$ Teilräume, s.d. $\bar{A} \subseteq \bar{Y}$. Dann induziert die Inklusion $j: (X \setminus A, Y \setminus A) \rightarrow (X, A)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ einen $H_n(X \setminus A, Y \setminus A) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A)$.

Die Homologietheorie heiße zudem gewöhnlich, falls das Dimensionaxiom gilt:

$$4.) H_n(\cdot, \emptyset) = 0 \text{ für } n \neq 0.$$

Andernfalls heiße sie verallgemeinert. Wir schreiben kurz $H_n(X)$ für $H_n(X, \emptyset)$. Die R -Moduln $H_n(\cdot)$ heißen Koeffizientenmoduln der Homologietheorie.

Notiz. Ist (H_*, ∂_*) eine Homologietheorie, so induziert $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine „kommutative Leiter“ mit exakten Zeilen:

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}(X, A)} H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow \cdots$$

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}(f) \downarrow & \cap & H_n(f|_A) \downarrow & \cap & H_n(f) \downarrow & \cap & H_n(f) \downarrow \\ & \text{(Nat. Trfo.)} & & & & & \end{array}$$

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(Y, B) \xrightarrow{\partial_{n+1}(Y, B)} H_n(B) \rightarrow H_n(Y) \rightarrow H_n(Y, B) \rightarrow \cdots$$

II Singuläre Homologie

Ziel: Konstruktion einer gewöhnlichen Homologietheorie

II.1 Definition der singulären Homologie

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Wir definieren

H_n^{sing} als Komposition zweier Funktoren

$$\text{Top}^{(2)} \xrightarrow{C_*(\cdot; R)} \underline{R\text{-chain}} \xrightarrow{H_*} \underline{R\text{-mod}}$$

Morphismen in $\underline{R\text{-chain}}$ sind Kettenabbildungen, d.h.

Familien $\{f_*: C_* \rightarrow D_*\}$ von R -Modulhom., sd.

$d_n \circ f_n = f_{n-1} \circ c_n$, also

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{c_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{c_n} & C_{n-1} \rightarrow \cdots \\ & & f_{n+1} \downarrow & \circlearrowleft & f_n \downarrow & \circlearrowleft & f_{n-1} \downarrow \\ \cdots & \rightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{d_n} & D_{n-1} \rightarrow \cdots \end{array}$$

Für $z \in \text{Ker } c_n$ gilt $d_n(f_n(z)) = f_{n-1}(c_n(z)) = 0$,
also $d_n(\text{Ker } c_n) \subseteq \text{Ker } d_n$ und für $b \in \text{Bild } c_{n+1}$,
 $b = c_{n+1}(x)$, gilt $f_n(b) = f_n(c_{n+1}(x)) = d_{n+1}(f_{n+1}(x))$,
also $f_n(\text{Bild } c_{n+1}) \subseteq \text{Bild } d_{n+1}$.

$\leadsto f_*$ induziert $H_n(f_*): H_n(C_*) \rightarrow H_n(D_*)$

$\leadsto H_n(g_* \circ f_*) = H_n(g_*) \circ H_n(f_*)$, $H_n(\text{id}_{C_*}) = \text{id}_{H_n(C_*)}$

$\leadsto H_*: \underline{R\text{-chain}} \rightarrow \underline{R\text{-mod}}$ ist ein Funktor!

Sei nun X ein top. Raum.

Def. I.2.1 Der n -te **singuläre Kettenmodul** $C_n^{(sing)}(X; R)$ ist der freie R -Modul mit Basis $\{\sigma^n: \Delta^n \rightarrow X, \sigma^n \text{ stetig}\}$. (Vereinbarung: $C_n(X; R) = 0$ für $n < 0$).

→ „Singular“, weil alle stetigen Abb. $\sigma^n: \Delta^n \rightarrow X$ erlaubt sind, egal wie singular: $\Delta \rightsquigarrow$ 

→ **Singuläre Randabb.** $\partial_n: C_n(X; R) \rightarrow C_{n-1}(X; R)$
 $\sigma_n \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_n|_{[\hat{v}_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_n]}$

→ $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ wie zuvor

→ Für $(X, A) \in \text{Ob}_{\text{Top}^{(1)}}$ definiere $C_n(X, A; R) := C_n(X; R) / C_n(A; R)$

→ $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induziert

$$C_n(f; R): C_n(X, A; R) \rightarrow C_n(Y, B; R)$$

$$[\sigma_n: \Delta^n \rightarrow X] \mapsto [f \circ \sigma_n]$$

→ Nach Konstruktion ist $C_n(\cdot, \cdot; R)$ funktoriell

→ $\partial_n(C_n(A; R)) \subseteq C_{n-1}(A; R)$, also erhalten wir
 $\partial_n: C_n(X, A; R) \rightarrow C_{n-1}(X, A; R)$

→ Offensichtlich gilt $\partial_n \circ C_n(f) = C_{n-1}(f) \circ \partial_n$, also ist $C_n(f)$ eine Kettenabbildung.

→ $C_*(\cdot, \cdot; R): \text{Top}^{(1)} \rightarrow \underline{R\text{-chains}}$ ist ein Funktor!

Def. I.2.2 Die n -te **singuläre Homologie** eines Raumpaares (X, A) mit Koeff. in R ist der R -Modul

$$H_n^{(sing)}(X, A; R) = H_n(C_*(X, A; R)).$$

Notiz: $H_n^{(sing)} = H_n \circ C_*(\cdot, \cdot; R)$ ist ein Funktor.

Noch zu konstruieren: nat. Trafo.

$$\partial_n(X, A): H_n^{\text{sing}}(X, A; \mathbb{R}) \rightarrow H_{n-1}^{\text{sing}}(A; \mathbb{R}).$$

II.2 Die LES eines Raumpaares

Ziel. Konstruiere die nat. Trafo. $\partial_n: H_n^{\text{sing}} \rightarrow H_{n-1}^{\text{sing}} \circ j$ rein algebraisch und zeige das LES-Axiom für $(H_*^{\text{sing}}, \partial_*)$.

Lemma II.2.1 (Schlangenlemma)

Ein Diagramm in $\mathbb{R}$ -mod

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \cdots & A & \xrightarrow{c} & B & \xrightarrow{\delta} & C \rightarrow 0 \\ & & f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow \\ 0 & \rightarrow & A' & \xrightarrow{c'} & B' & \xrightarrow{\delta'} & C' \cdots \rightarrow 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen induziert eine natürliche exakte Folge

$$\begin{aligned} 0 \cdots \ker f &\rightarrow \ker g \rightarrow \ker h \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} f \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{coker} g \rightarrow \operatorname{coker} h \cdots \rightarrow 0 \end{aligned}$$

in folgendem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \cdots \ker f & \rightarrow & \ker g & \rightarrow & \ker h & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \delta \\ 0 \cdots A & \xrightarrow{c} & B & \xrightarrow{\delta} & C & \rightarrow & 0 \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 \rightarrow A' & \xrightarrow{c'} & B' & \xrightarrow{\delta'} & C' \cdots & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \operatorname{coker} f & \rightarrow & \operatorname{coker} g & \rightarrow & \operatorname{coker} h & \cdots & \rightarrow 0 \end{array}$$

Beweis. Diagrammjagd. zur Konstruktion von δ :

- zu $c \in \ker h$ wähle $b \in B$ mit $j(b) = c$. Weil $j'(g(b)) = h(j(b)) = h(c) = 0$, ist $g(b) \in \ker j' = \text{Bild } i'$. Also gibt es $a' \in A'$ mit $i'(a') = g(b)$. Setze $\delta(c) = a' + \text{Bild } f \in \text{coker } f$.
- Falls $b, b' \in B$ mit $j(b) = j(b') = c \in \ker h$, dann $b - b' = i(a_0)$ für ein $a_0 \in A$, also $i'(a - a') = g(b - b') = g(i(a_0)) = i'(f(a_0))$, d.h. $a - a' = f(a_0) \in \text{Bild } f$, weil i' injektiv.
- Seien $c_1, c_2 \in \ker h$ und $\delta(c_1) = a'_1 + \text{Bild } f$, $\delta(c_2) = a'_2 + \text{Bild } f$, $\delta(c_1 + c_2) = a'_3 + \text{Bild } f$ und b_i Urbilder von a'_i unter g wie oben. Dann gilt $i'(a'_1 + a'_2 - a'_3) = g(b'_1 + b'_2 - b'_3)$ und $j(b'_1 + b'_2 - b'_3) = c_1 + c_2 - (c_1 + c_2) = 0$, also gibt es $a \in A$ mit $i(a) = b'_1 + b'_2 - b'_3$ und damit $i'(a'_1 + a'_2 - a'_3) = g(i(a)) = i'(f(a))$, also $a'_1 + a'_2 - a'_3 = f(a) \in \text{Bild } f$, weil i' injektiv. $\square$

Eine kurze exakte Folge (SES) von Kettenkomplexen ist eine Folge von Kettenabbildungen

$$0 \rightarrow A_* \xrightarrow{f_*} B_* \xrightarrow{g_*} C_* \rightarrow 0,$$

sodass für jedes $n \in \mathbb{Z}$

$$0 \rightarrow A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \rightarrow 0$$

eine SES von R -Modulen ist.

Satz II.2.2 Eine SES von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow C_* \rightarrow D_* \rightarrow E_* \rightarrow 0$$

induziert eine natürliche LES von R -Modulen

$$\cdots \rightarrow H_{n+2}(E_*) \xrightarrow{\delta} H_n(C_*) \rightarrow H_n(D_*) \rightarrow H_n(E_*) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

Beweis. Betrachte:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C_{n+2} & \rightarrow & D_{n+2} & \rightarrow & E_{n+2} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow c_{n+1} & & \downarrow d_{n+1} & & \downarrow e_{n+1} \\ 0 & \rightarrow & C_n & \rightarrow & D_n & \rightarrow & E_n \rightarrow 0 \end{array}$$

Schlangenlemma: $C_n/B_n(C_*) \rightarrow D_n/B_n(D_*) \rightarrow E_n/B_n(E_*) \rightarrow 0$ exakt.

Betrachte:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C_{n-1} & \rightarrow & D_{n-1} & \rightarrow & E_{n-1} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow c_{n-1} & & \downarrow d_{n-1} & & \downarrow e_{n-1} \\ 0 & \rightarrow & C_{n-2} & \rightarrow & D_{n-2} & \rightarrow & E_{n-2} \rightarrow 0 \end{array}$$

Schlangenlemma: $0 \rightarrow Z_{n-1}(C_*) \rightarrow Z_{n-1}(D_*) \rightarrow Z_{n-1}(E_*)$ exakt.

Betrachte

$$\begin{array}{ccccc} C_n/B_n(C_*) & \xrightarrow{\quad} & D_n/B_n(C_*) & \xrightarrow{\quad} & E_n/B_n(E_*) \rightarrow 0 \\ \bar{c}_n \downarrow & & \bar{d}_n \downarrow & & \bar{e}_n \downarrow \\ 0 \rightarrow Z_{n-1}(C_*) & \rightarrow & Z_{n-1}(D_*) & \rightarrow & Z_{n-1}(E_*) \end{array}$$

Schlangenlemma:

$$H_n(C_*) \rightarrow H_n(D_*) \rightarrow H_n(E_*) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C_*) \rightarrow H_{n-1}(D_*) \rightarrow H_{n-1}(E_*)$$

ist exakt (und natürlich).

□

Sei (X, A) ein Raumpaar. Anwenden auf

$$0 \rightarrow C_*^{\text{sing}}(A; \mathbb{R}) \rightarrow C_*^{\text{sing}}(X; \mathbb{R}) \rightarrow C_*^{\text{sing}}(X, A; \mathbb{R}) \rightarrow 0$$

liefert die nat. Trafos. $\partial_n: H_n^{\text{sing}} \rightarrow H_{n-1}^{\text{sing}} = J$
als Randabbildung δ und:

Satz II.2.3 Das Paar $(H_*^{\text{sing}}, \delta_*)$ erfüllt das LES-Axiom einer Homologietheorie mit Werten in $\mathbb{R}$ -Mod.

Bemerkung: Für ein Tripel $B \subseteq A \subseteq X$ ergibt die SES

$$0 \rightarrow C_*(A, B; \mathbb{R}) \rightarrow C_*(X, B; \mathbb{R}) \rightarrow C_*(X, A; \mathbb{R}) \rightarrow 0$$

allgemeiner die LES

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(X, A; \mathbb{R}) \rightarrow H_n(A, B; \mathbb{R}) \rightarrow H_n(X, B; \mathbb{R}) \rightarrow H_n(X, A; \mathbb{R}) \rightarrow \cdots$$

II.3 Homotopieinvarianz

Ziel: zeige: $f \simeq g \Rightarrow H_n^{\text{sing}}(f) = H_n^{\text{sing}}(g)$.

Def. II.3.1 Eine **R-Kettenhomotopie** von R-Kettenabb. $f_*, g_*: (C_*, d_*) \rightarrow (D_*, d_*)$

ist eine Familie von R-Modulhom. $h_n: C_n \rightarrow D_{n+1}$,
so dass gilt $f_n - g_n = h_{n-1} \circ d_n + d_{n+1} \circ h_n$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & C_{n+1} & \rightarrow & C_n & \rightarrow & C_{n-1} \rightarrow \cdots \\ & & \downarrow & \swarrow h_n & \downarrow f_n & \searrow h_{n-1} & \downarrow \\ \cdots & \rightarrow & D_{n+1} & \rightarrow & D_n & \rightarrow & D_{n-1} \rightarrow \cdots \end{array}$$

Notation $f_* \simeq_{h_*} g_*$.

Lemma II.3.2 Aus $f_* \simeq_{h_*} g_*$ folgt $H_n(f_*) = H_n(g_*)$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis Für $z \in Z_n(C_*)$ gilt

$$f_n(z) = g_n(z) + \underbrace{h_{n-1}(d_n(z))}_{=0} + \underbrace{d_{n+1}(h_n(z))}_{\in B_n(D_*)}.$$

□

Notiz: Kettenhomotopie ist eine Äquivalenzrelation.

• Für $f_*^1, g_*^1: C_* \rightarrow D_*$, $f_*^2, g_*^2: D_* \rightarrow E_*$

mit $f_*^1 \simeq g_*^1$ und $f_*^2 \simeq g_*^2$ gilt $f_*^2 \circ f_*^1 \simeq g_*^2 \circ f_*^1$.

Die Umkehrung von Lemma 4.9 ist falsch (Hausaufgabe.)

Eine Kettenhomotopieäquivalenz ist eine Kettenabb.

$$f_*: (C_*, c_*) \rightarrow (D_*, d_*)$$

mit einem Kettenhomotopieinversen $g_*: D_* \rightarrow C_*$, sodass

$$g_* \circ f_* \simeq \text{id}_{C_*} \text{ und } f_* \circ g_* \simeq \text{id}_{D_*}.$$

$$\text{Notation: } (C_*, c_*) \simeq_{f_*} (D_*, d_*).$$

Lemma II.3.3 Für $(C_*, c_*) \simeq_{f_*} (D_*, d_*)$ ist $H_n(f_*)$ ein Isomorphismus für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Aus Lemma 4.9 folgt

$$H_n(g_* \circ f_*) = H_n(\text{id}_{C_*}) \text{ und } H_n(f_* \circ g_*) = H_n(\text{id}_{D_*}).$$

Weil wir schon gesehen haben, dass

$H_n: \underline{R\text{-chain}} \rightarrow \underline{R\text{-mod}}$ ein Funktor ist, folgt

$$H_n(g_*) \circ H_n(f_*) = \text{id}_{H_n(C_*)} \text{ und } H_n(f_*) \circ H_n(g_*) = \text{id}_{H_n(D_*)}. \quad \square$$

Bemerkung: Antitilige Umkehrung: Ist R ein Hauptidealring und bestehen C_* und D_* aus freien R -Modulen, dann ist eine Kettenabb. $f_*: C_* \rightarrow D_*$ mit $H_n(f_*): H_n(C_*) \xrightarrow{\cong} H_n(D_*)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ eine Kettenhomotopieäquivalenz (ohne Beweis).

Zeigen zunächst: Falls $f, g: X \rightarrow Y$, $f \simeq_F g$, dann $H_n^{\text{Zin}}(f) = H_n^{\text{Zin}}(g)$. Setze $f_* := C_*^{\text{Zin}}(f)$, $g_* := C_*^{\text{Zin}}(g)$

zt. Lemma 4.9 zu konstruieren: $f_* \simeq_{P_*} g_*$,

$$P_n: C_n^{\text{Zin}}(X; R) \rightarrow C_{n+1}^{\text{Zin}}(Y; R). \text{ Zu } \sigma: \Delta^n \rightarrow X$$

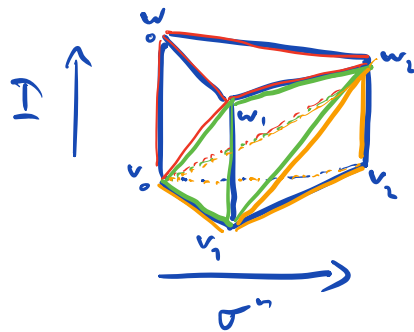
betrachte

$$\Delta^n \times I \xrightarrow{\sigma^n \times \text{id}_I} X \times I \xrightarrow{F} Y$$

und definiere

$$P_n(\sigma^n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (F \circ (\sigma^n \times \text{id}_I))|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]},$$

wobei $v_0, \dots, v_i$ Vertices im „Prismaboden“ $\Delta^n \times \{0\}$
und $w_i, \dots, w_n$ Vertices im „Prismadach“ $\Delta^n \times \{1\}$.



$$\text{z. z.: } \partial_{n+1} \circ P_n = g_n - f_n - P_{n-1} \circ \partial_n$$

$\nearrow$ Rand des Prismas
 $\uparrow$ Dach
 $\uparrow$ Boden
 $\uparrow$ drei Wände

Formal:

$$\partial_{n+1}(P_n(\sigma^n)) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_{n+1}(F \circ (\sigma^n \times \text{id}_I))|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}$$

$$= \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} (-1)^j (-1)^i F \circ (\sigma^n \times \text{id}_I)|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}$$

$$+ \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (-1)^{i+1} (-1)^i F \circ (\sigma^n \times \text{id}_I)|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n F \circ (\sigma^n \times \text{id}_{\mathbb{I}}) \Big|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, w_i, \dots, w_n]} \\
&\quad - \sum_{i=0}^n F \circ (\sigma^n \times \text{id}_{\mathbb{I}}) \Big|_{[v_0, \dots, v_i, \hat{w}_i, \dots, w_n]} \\
&\quad + \sum_{i < i} (\dots) + \sum_{i < j} (\dots) \\
&= F \circ (\sigma^n \times \text{id}_{\mathbb{I}}) \Big|_{[w_0, \dots, w_n]} - F \circ (\sigma^n \times \text{id}_{\mathbb{I}}) \Big|_{[v_0, \dots, v_n]} \\
&\quad - \left(\sum_{i < j} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma^n \times \text{id}_{\mathbb{I}}) \Big|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j < i} (-1)^{i'} (-1)^j F \circ (\sigma^n \times \text{id}_{\mathbb{I}}) \Big|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \right) \\
&= g_n(\sigma^n) - f_n(\sigma^n) - P_{n-1}(\partial_n(\sigma_n)).
\end{aligned}$$

Für $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, $f \simeq_F g$, $F_t(A) \subseteq B$
für alle $t \in I$ gilt nun $P_n(C_n^{\text{sing}}(A; R)) \subseteq C_{n+1}^{\text{sing}}(B; R)$,
also erhalten wir

$$P_n: C_n^{\text{sing}}(X, A; R) \rightarrow C_{n+1}^{\text{sing}}(Y, B; R)$$

und noch immer $g_n - f_n = \partial_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n$.

Somit gezeigt:

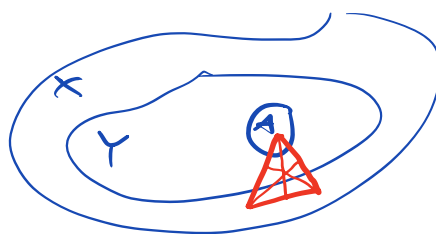
Satz II.3.4 Das Paar (H_*^{sing}, d_*) erfüllt das Homotopie-
invarianzaxiom einer Homologietheorie mit Werten in $\mathbb{R}\text{-mod.}$

II.4 Ausschneidung

Ziel: Zeige für $A \subseteq Y \subseteq X$ mit $\bar{A} \subset \overset{\circ}{Y}$, dass
 $H_n^{\text{sing}}(X \setminus A, Y \setminus A; \mathbb{R}) \cong H_n^{\text{sing}}(X, Y; \mathbb{R})$.

Erinnerung: Für Δ -Komplexe $A \subset Y \subset X$ mit $A \subset \overset{\circ}{Y}$ gilt $C_n^A(X \setminus A, Y \setminus A; \mathbb{R}) \cong C_n^A(X, Y; \mathbb{R})$. Einen solchen Iso auf Kettenkomplexebene kann man für sing. Homologie nicht erwarten:

Idee: Unterteile Simplexe, damit sie entweder in $X \setminus A$ oder in Y liegen!



Dazu betrachten wir allgemeiner eine Familie $\mathcal{U} = \{U_j\}$ von Unterräumen $U_j \subseteq X$ mit $\bigcup_j U_j = X$. Sei

$C_n^{\text{sing}}(X; \mathbb{R}) \supseteq C_n^{\mathcal{U}}(X; \mathbb{R}) := \{\sigma: \Delta^n \rightarrow X : \sigma(\Delta^n) \subseteq U_j \text{ für ein } j\}$
der Unterkomplex der $\mathcal{U}$ -kleinen Ketten.

Haben außerdem Inklusionen $C_*^{\text{sing}}(U_j; \mathbb{R}) \subseteq C_*^{\mathcal{U}}(X; \mathbb{R})$ von Unterkomplexen für alle j .

Prop. II.4.1 Die Inklusion $i_*: C_*^{\mathcal{U}}(X; \mathbb{R}) \rightarrow C_*^{\text{sing}}(X; \mathbb{R})$ hat ein Kettenhomotopieinverses $r_*: C_*^{\text{sing}}(X; \mathbb{R}) \rightarrow C_*^{\mathcal{U}}(X; \mathbb{R})$ mit $r_* \circ i_* = \text{id}_{C_*^{\mathcal{U}}(X; \mathbb{R})}$ und $i_* \circ r_* \simeq_{F_*} \text{id}_{C_*^{\text{sing}}(X; \mathbb{R})}$, sodass $F_*(C_*^{\text{sing}}(U_j)) \subseteq C_{*+1}^{\text{sing}}(U_j)$ für alle j .

Satz II.4.2 Das Paar $(H_*^{\text{sing}}, \partial_*)$ erfüllt das Ausschneidungsaxiom einer Homologietheorie mit Werten in $\mathbb{R}\text{-mod}$.

Bew. Seien $A \subseteq Y \subseteq X$ mit $\bar{A} \subseteq \overset{\circ}{Y}$. Setze $U = \{Y, X \setminus A\}$ dann gilt $\overset{\circ}{Y} \cup (X \setminus A) = \overset{\circ}{Y} \cup X \setminus \bar{A} = X$. Erhalten

$$\Gamma_*: C_*^{\text{sing}}(X; \mathbb{R}) \rightarrow C_*^U(X; \mathbb{R})$$

und $i_* \circ \Gamma_* \simeq_{F_*} \text{id}_{C_*^{\text{sing}}(X; \mathbb{R})}$ wie in Prop. 4.12.
Haben

$$C_*^{\text{sing}}(X; \mathbb{R}) \supseteq C_*^{\text{sing}}(Y; \mathbb{R}) \subseteq C_*^U(X; \mathbb{R})$$

und daher (weil $\Gamma_*|_{C_*^{\text{sing}}(Y; \mathbb{R})} = \text{id}_{C_*^{\text{sing}}(Y; \mathbb{R})}$)

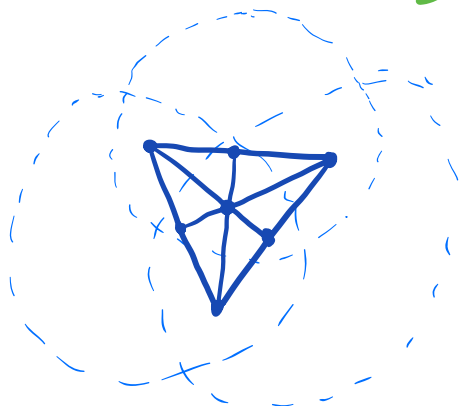
$$\begin{array}{ccc} C_*^U(X; \mathbb{R}) & \xrightleftharpoons[i_*]{\Gamma_*} & C_*^{\text{sing}}(X; \mathbb{R}) \\ \bigg/_{C_*^{\text{sing}}(Y; \mathbb{R})} & & \bigg/_{C_*^{\text{sing}}(Y; \mathbb{R})} \\ \parallel & & \parallel \\ (C_*^{\text{sing}}(X \setminus A; \mathbb{R}) + C_*^{\text{sing}}(Y; \mathbb{R})) & & C_*^{\text{sing}}(X, Y; \mathbb{R}) \\ \nearrow \text{nicht-direkte Summe} & & \bigg/_{C_*^{\text{sing}}(Y; \mathbb{R})} \\ \parallel & & \\ C_*^{\text{sing}}(X \setminus A, Y \setminus A; \mathbb{R}) & & \end{array}$$

Weil $F_*(C_*^{\text{sing}}(Y; \mathbb{R})) \subseteq C_{*+1}^{\text{sing}}(Y; \mathbb{R})$, folgt

$$C_*^{\text{sing}}(X \setminus A, Y \setminus A; \mathbb{R}) \simeq C_*^{\text{sing}}(X, Y; \mathbb{R})$$

und mit Lemma 4.10 folgt die Behauptung. $\square$

Wir beweisen nun Prop. 4.12. Idee zur Konstr. von r_n :
 Iterierte **baryzentrische Unterteilung**, bis die Kette
 U -klein ist:



Problem: Dies definiert keine Kettenabbildung, denn
 es kann passieren, dass σ^n unterteilt werden muss,
 aber $\partial\sigma^n$ nicht (wie im Bild!), sodass

$$\begin{array}{ccc} C_n^{\text{sing}}(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}^{\text{sing}}(X) \\ \downarrow r_n & & \downarrow r_{n-1} \\ C_n^U(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}^U(X) \end{array}$$

nicht kommutiert. $\leadsto$ Brauchen Korrekturterme.

Nun zum formalen Beweis: Erklären baryzentrische
 Unterteilung. Jede $p+1$ Punkte $v_0, \dots, v_p \in \Delta^q$
 definieren eine affin lineare Abb. $\Delta^p \rightarrow \Delta^q$, die
 wir (missbräuchlich) mit $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ bezeichnen.

Sei $L_p(\Delta^q; \mathbb{R}) \subseteq C_p^{\text{sing}}(\Delta^q; \mathbb{R})$ der freie Untermodul
 erzeugt von affin linearen p -Simplex in Δ^q .

Jeder fixierte Punkt $v \in \Delta^q$ definiert einen

„Kegeloperator“

$$v: L_p(\Delta^q) \longrightarrow L_{p+1}(\Delta^q)$$

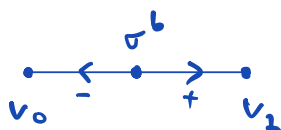
$$\sigma \longmapsto v\sigma = [v, v_0, \dots, v_p].$$

Für $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ sei $\sigma^b = \frac{1}{p+1} (v_0 + \dots + v_p)$ das Baryzentrum von σ .

Def II.4.3 Der **baryzentrische Zerteilungsoperator** $B_p: L_p(\Delta^q; \mathbb{R}) \longrightarrow L_p(\Delta^q; \mathbb{R})$ wird induktiv definiert durch $B_0(\sigma) = \sigma$ und $B_p(\sigma) = \sigma^b B_{p-1}(\partial_p \sigma)$.

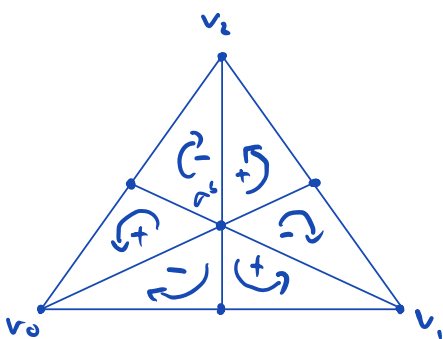
Für $p=1$ und $\sigma = [v_0, v_1]$ gilt also

$$\begin{aligned} B_1(\sigma) &= \sigma^b \partial_p \sigma = \sigma^b ([v_1] - [v_0]) = \\ &= [\tfrac{1}{2}(v_0+v_1), v_1] - [\tfrac{1}{2}(v_0+v_1), v_0] \end{aligned}$$



Für $p=2$ und $\sigma = [v_0, v_1, v_2]$ gilt

$$\begin{aligned} B_2(\sigma) &= \sigma^b B_2(\partial \sigma) = \sigma^b B_2([v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]) \\ &= \sigma^b ([\tfrac{1}{2}(v_1+v_2), v_2] - [\tfrac{1}{2}(v_1+v_2), v_1] - [\tfrac{1}{2}(v_0+v_2), v_2] \\ &\quad + [\tfrac{1}{2}(v_0+v_2), v_0] + [\tfrac{1}{2}(v_0+v_1), v_1] - [\tfrac{1}{2}(v_0+v_1), v_0]) \\ &= [\sigma^b, \tfrac{1}{2}(v_1+v_2), v_2] - [\sigma^b, \tfrac{1}{2}(v_1+v_2), v_1] - [\sigma^b, \tfrac{1}{2}(v_0+v_2), v_2] \\ &\quad + [\sigma^b, \tfrac{1}{2}(v_0+v_2), v_0] + [\sigma^b, \tfrac{1}{2}(v_0+v_1), v_1] - [\sigma^b, \tfrac{1}{2}(v_0+v_1), v_0] \\ \sigma_b &= \tfrac{1}{3} (v_0 + v_1 + v_2). \end{aligned}$$



Vereinbaren noch $B_p = 0$ für $p < 0$.

Lemma II.4.4 $B_*: L_*(\Delta^q; R) \rightarrow L_*(\Delta^q; R)$ ist eine Kettenabbildung.

Bew. z.z.: $\partial_p \circ B_p = B_{p-1} \circ \partial_p$ durch Ind. nach p .

Aufang: für $p \leq 0$ gilt $\partial_p = 0$, also ist die Gleichheit klar.

Schritt: Für $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ und $v \in \Delta^q$ gilt

$$\begin{aligned} \partial_{p+1}(v\sigma) &= \sigma + \sum_{c=0}^p (-1)^{c+1} [v, v_0, \dots, \hat{v}_c, \dots, v_p] = \\ &= \sigma - v(\partial_p \sigma). \end{aligned}$$

$$\text{Es folgt } \partial_p(B_p(\sigma)) = \partial_p(\sigma^b B_{p-1}(\partial_p \sigma)) =$$

$$= B_{p-1}(\partial_p \sigma) - \sigma^b \partial_{p-1}(B_{p-1}(\partial_p \sigma)) =$$

$$\stackrel{\text{Ind.}}{=} \underset{\text{vor.}}{B_{p-1}(\partial_p \sigma)} - \sigma^b B_{p-1}(\partial_{p-1}(\partial_p \sigma)) = B_{p-1}(\partial_p \sigma). \quad \square$$

Lemma II.4.5 Der Durchmesser eines Simplexes in $B_p(\sigma)$ ist höchstens $\frac{p}{p+1} \cdot \text{Diam}(\sigma)$.

Bew. Klar: Durchmesser wird realisiert durch $[\sigma^b, v_i]$ für ein i , wenn $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$. Die Verlängerung von $[\sigma^b, v_i]$ schneidet die i -te Seite in ihrem

Baryzentrum $\sigma_i^b = \frac{1}{p} (v_0 + \dots + \hat{v}_i + \dots + v_p)$, d.h.

$$\sigma^b = \frac{p}{p+1} \sigma_i^b + \frac{1}{p+1} \cdot v_i.$$

Dennach ist die Strecke von σ_i nach σ^b der $\frac{p}{p+1}$ -te Teil der Strecke von σ_i nach σ_i^b (setze o.B.d.A. $v_i \neq 0$) und daher

$$\|\sigma^b - v_i\| = \frac{p}{p+1} \|\sigma_i^b - v_i\| \leq \frac{p}{p+1} \text{Diam}(\sigma). \quad \square$$

Lemma II.4.6. Definiere $h_*: L_*(\Delta^q; \mathbb{R}) \rightarrow L_{*+1}(\Delta^q; \mathbb{R})$ induktiv durch $h_p = 0$ für $p < 0$ und $h_p(\sigma) = \sigma^b(\sigma - h_{p-1}(\partial_p \sigma))$. Dann gilt $\text{id}_* \approx_{h_*} B_*$.

Bew. z.z. $\text{id}_p - B_p = h_{p-1} \circ \partial_p + \partial_{p+1} \circ h_p$ durch Ind. nach p .
Anfang: trivial. Schritt:

$$\begin{aligned} \partial_{p+1}(h_p(\sigma)) &= \partial_{p+1}(\sigma^b(\sigma - h_{p-1}(\partial_p \sigma))) = \\ &\stackrel{\text{z.o.}}{=} \sigma - h_{p-1}(\partial_p \sigma) - \sigma^b(\partial_p(\sigma - h_{p-1}(\partial_p \sigma))) = \\ &= \sigma - h_{p-1}(\partial_p \sigma) - \sigma^b(\partial_p(\sigma)) + \sigma^b \partial_p(h_{p-1}(\partial_p \sigma)). \end{aligned}$$

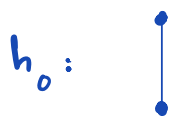
Nach Ind. vor. gilt

$$\begin{aligned} \partial_p(h_{p-1}(\partial_p \sigma)) &= \partial_p \sigma - B_{p-1}(\partial_p \sigma) - h_{p-2}(\partial_{p-1}(\partial_p \sigma)) \\ &= \partial_p \sigma - B_{p-1}(\partial_p \sigma). \end{aligned}$$

Oben einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} \partial_{p+1}(h_p(\sigma)) &= \sigma - h_{p-1}(\partial_p \sigma) - \sigma^b(\partial_p(\sigma)) + \\ &\quad \sigma^b \partial_p \sigma - \sigma^b B_{p-1}(\partial_p \sigma) \\ &= \text{id}_p(\sigma) - B_p(\sigma) - h_{p-1}(\partial_p \sigma). \quad \square \end{aligned}$$

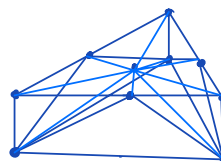
Sinnbilder



h_1 :



h_2 :



Sei nun X ein top. Raum. Wir definieren eine nat. Trafo. in X mit Komponente

$$B(X)_p: C_p^{\text{sing}}(X; \mathbb{R}) \rightarrow C_p^{\text{sing}}(X; \mathbb{R})$$

$$\sigma^p \mapsto C_p^{\text{sing}}(\sigma^p; \mathbb{R}) (B_p(\text{id}_{\Delta_p}))$$

und eine nat. Trafo in X mit Komponente

$$h(X)_p: C_p^{\text{sing}}(X; \mathbb{R}) \rightarrow C_{p+2}^{\text{sing}}(X; \mathbb{R})$$

$$\sigma^p \mapsto C_{p+2}^{\text{sing}}(\sigma^p; \mathbb{R}) (h_p(\text{id}_{\Delta_p})).$$

Lemma I.4.7 $B(X)_*$ ist eine Kettenabb. und

$$\text{id}_{C_*^{\text{sing}}(X; \mathbb{R})} \simeq_{h_*(X)} B(X)_*$$

Bew. Für $p \leq 0$ jeweils klar. Für $p > 0$, sei $f_i: [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] \rightarrow [v_0, \dots, v_p]$ die i -te Seitenabb. Für $\sigma^p \in C_p^{\text{sing}}(X; \mathbb{R})$ gilt

$$B_{p-1}(X)(\partial_p \sigma^p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i C_{p-1}^{\text{sing}}(\sigma^p \circ f_i) (B_{p-1}(\text{id}_{\Delta_{p-1}}))$$

$$= \sum_{i=0}^p (-1)^i C_{p-1}^{\text{sing}}(\sigma^p) (C_{p-1}^{\text{sing}}(f_i) (B_{p-1}(\text{id}_{\Delta_{p-1}}))) =$$

$$= \sum_{i=0}^p (-1)^i C_{p-1}^{\text{sing}}(\sigma^p) (B_{p-1}(f_i)) =$$

$$= C_{p-1}^{\text{sing}}(\sigma^p) \left(B_{p-1} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i f_i \right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= C_{p-1}^{\text{inj}}(\sigma^p)(B_{p-1}(\partial_p \text{id}_{\Delta_p})) \stackrel{4.16}{=} \\
&= C_{p-1}^{\text{inj}}(\sigma^p)(\partial_p(B_p(\text{id}_{\Delta_p}))) = \\
&= \partial_p(C_p^{\text{inj}}(\sigma^p)(B_p(\text{id}_{\Delta_p}))) = \partial_p(B(X)_p(\sigma^p)).
\end{aligned}$$

So ähnlich folgt mit Lemma 4.18 $\text{id}_{C_*^{\text{inj}}(X; \mathbb{R})} \cong h(X)_* B(X)_*$ $\square$

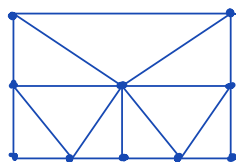
$$\begin{aligned}
\text{Demnach gilt auch } B^2(X)_* &= B(X)_* \circ B^{2-1}(X)_* = \\
&= B^{2-1}(X)_* = \dots = B(X)_* \cong \text{id}_{C_*^{\text{inj}}(X; \mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Eine Kettenhomotopie von $\text{id}_{C_*^{\text{inj}}(X; \mathbb{R})}$ nach $B^2(X)_*$ ist

$$G_*^2 = \sum_{i=0}^{2-1} h(X)_* \circ B^i(X)_*, \text{ denn}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{*+1} G_*^2 + G_{*-1}^2 \partial_* &= \\
&= \sum_{i=0}^{2-1} (\partial_{*+1} h(X)_* \circ B^i(X)_* + h(X)_{*-1} B^i(X)_{*-1} \partial_*) \\
&= \sum_{i=0}^{2-1} (\partial_{*+1} h(X)_* + h(X)_{*-1} \partial_*) \circ B^i(X)_* \\
&= \sum_{i=0}^{2-1} (\text{id}_* - B(X)_*) \circ B^i(X)_* \\
&= \text{id}_* - B^2(X)_*. \quad (*)
\end{aligned}$$

Sinnbild:



Lemma II.4.8 Sei $\mathcal{U} = \{U_i\}$ eine Familie von Teilräumen $U_i \subseteq X$ mit $\bigcup U_i = X$. Zu jedem $\sigma^p: \Delta^p \rightarrow X$ gibt es $k \geq 0$, sodass $B^k(X)_p(\sigma^p)$ $\mathcal{U}$ -klein ist.

Bew. Wähle ein Lebesgue- δ für $\{(\sigma^p)^{-1}(U_i)\}$ und $k \in \mathbb{N}$, sodass alle Simplexe in $B^k_p(\text{id}_{\Delta_p})$ Durchmesser kleiner δ haben (Lemma II.4.5). Dann ist $B^k(X)_p(\sigma)$ $\mathcal{U}$ -klein. $\square$

Bew. (von Prop. II.4.1) Sei $\mathcal{U} = \{U_i\}$ mit $\bigcup U_i = X$.

Definiere $F_p: C_p^{\text{sing}}(X; \mathbb{R}) \rightarrow C_{p+2}^{\text{sing}}(X; \mathbb{R})$
 $\sigma^p \mapsto G_p^{k(\sigma^p)}(\sigma^p),$

wobei $k(\sigma^p) \in \mathbb{N}$ minimal wie in Lemma 4.21. Setze

$$\Gamma_p(\sigma^p) := B^{k(\sigma^p)}(X)_p(\sigma^p) + G_{p-1}^{k(\sigma^p)}(\partial_p \sigma^p) - F_{p-1}(\partial_p \sigma^p)$$

Simplex $\mathcal{U}$ -klein machen Rand wieder zusammenkleben Rand $\mathcal{U}$ -klein machen

Es gilt $\Gamma_*(C_*^{\text{sing}}(X; \mathbb{R})) \subseteq C_*^{\mathcal{U}}(X; \mathbb{R})$, denn

die Differenz $G_{p-1}^{k(\sigma^p)}(\partial_p \sigma^p) - F_{p-1}(\partial_p \sigma^p)$ besteht nur aus $\mathcal{U}$ -kleinen Simplex. Mit (*) haben wir

$$\partial_{p+1} G_p^{k(\sigma^p)}(\sigma^p) + G_{p-1}^{k(\sigma^p)} \partial_p(\sigma^p) = \sigma^p - B^{k(\sigma^p)}(X)_p(\sigma^p)$$

$$\Leftrightarrow \partial_{p+1} F_p(\sigma^p) + F_{p-1} \partial_p(\sigma^p) = \sigma^p - \Gamma_p(\sigma^p). \quad (**)$$

$$\text{Daher } \partial_p \Gamma_p(\sigma^p) = \partial_p \sigma^p - \partial_p F_{p-1} \partial_p(\sigma^p) = \Gamma_{p-1} \partial_p(\sigma^p).$$

∂_p auf (*) anwenden

(**) mit $p \rightarrow p-1$ auf $\partial_p \sigma^p$ anwenden

Also ist Γ_* eine Kettenabb. und

$$\text{id}_{C_*^{\text{sing}}(X; R)} \stackrel{\sim}{=}_{F_*} i_* \circ \Gamma_*$$

Außerdem gilt $\Gamma_* \circ i_* = \text{id}_*$, denn $d(\sigma^p) = 0$ für $\sigma^p \in C_p^u(X; R)$ und $F_*(C_*^{\text{sing}}(U_j)) \subseteq C_{*+1}^{\text{sing}}(U_j)$, weil die Kette $F_p(\sigma^p)$ dasselbe Bild hat wie σ^p . $\square$

Satz II.4.9 Das Paar (H_*^{sing}, d_*) erfüllt das Dimensionsaxiom einer Homologietheorie mit Werten in $R\text{-mod}$ und hat den Koeff. modul $H_0^{\text{sing}}(\cdot) = R$.

Bew.: " $\bullet$ " ist terminal in Top. Also ist $C_*^{\text{sing}}(\cdot, R) =$

$$\cdots \xrightarrow{\text{id}} R \xrightarrow{3} R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{2} R \xrightarrow{\text{id}} R \xrightarrow{1} R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{-1} 0,$$

denn für $\sigma^p: \Delta_p \rightarrow \cdot$ gilt $\sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma_p | [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] = \begin{cases} 0 & p \equiv 1(2) \\ \Delta^{p-1} \rightarrow \cdot & p \equiv 0(2) \end{cases} \square$

Satz II.4.10 Das Paar (H_*^{sing}, d_*) ist eine gewöhnliche Homologietheorie mit Werten in $R\text{-mod}$ und Koeff. modul $H_0^{\text{sing}}(\cdot) = R$.

Bew. Sätze 4.6, 4.11, 4.13, 4.22. $\square$

Sei nun M ein beliebiger R -Modul. Für ein Raumpaar (X, A) sei

$$C_*^{\text{sing}}(X, A; M) := (C_*^{\text{sing}}(X, A; R) \otimes_R M, d_* \otimes \text{id}_*)$$

und setze $H_n^{\text{sing}}(X, A; M) := H_*(C_*^{\text{sing}}(X, A; M))$.

Dies definiert eine gewöhnliche Homologietheorie mit Werten in $\mathbb{R}$ -mod und $H_0^{\text{sing}}(\cdot) \cong M$, denn:

- Dim-Axiom: klar.
- LES-Axiom: $(\cdot) \otimes_R M$ ist nur rechts-exakt
 $\leadsto C_*^{\text{sing}}(A; M) \rightarrow C_*^{\text{sing}}(X; M) \rightarrow C_*^{\text{sing}}(X, A; M) \rightarrow 0$,
 aber $C_*^{\text{sing}}(X, A; \mathbb{R})$ ist frei, d.h. die SES
 $0 \rightarrow C_*^{\text{sing}}(A; \mathbb{R}) \xrightarrow{\quad} C_*^{\text{sing}}(X; \mathbb{R}) \xrightarrow{\quad} C_*^{\text{sing}}(X, A; \mathbb{R}) \rightarrow 0$
 zerfällt, also haben wir tatsächlich
 $0 \rightarrow C_*^{\text{sing}}(A; M) \rightarrow C_*^{\text{sing}}(X; M) \rightarrow C_*^{\text{sing}}(X, A; M) \rightarrow 0$.
- Weil $P_* \otimes \text{id}_M$ und $F_* \otimes \text{id}_M$ wieder Kettenhomotopien sind, folgen Homotopieinvarianz und Ausschneidung.

Existenzsatz. Zu jedem $\mathbb{R}$ -Modul M gibt es eine gewöhnliche Homologietheorie mit Werten in $\mathbb{R}$ -mod und Koeffizientenmodul M . $\square$

Später: Eindeigkeitsatz für sog. **Zellkomplexe**.

II.5 Singuläre Homologie in Grad null und eins

Ziel: Bestimme $H_0(X; M)$ und $H_1(X; \mathbb{Z})$.

Sei M ein $\mathbb{R}$ -Modul und X ein Raum.

Satz II.5.1 Wir haben einen nat. Iso.

$$H_n^{\text{sing}}(X; M) \cong \bigoplus_{X_\alpha \in \pi_0(X)} H_n^{\text{sing}}(X_\alpha; M).$$

Bew. Für $\sigma \in C_n^{\text{sing}}(X; \mathbb{R})$ ist $\sigma(\Delta^n) \subseteq X$

wegzögl. , also folgt $C_n^{sing}(X; R) \cong \bigoplus_{X_\alpha \in \pi_0(X)} C_n^{sing}(X_\alpha; R)$
 und diese Zerlegung wird von ∂_* und $(\cdot) \otimes_R M$ respektiert. Natürlichkeit ist klar. $\square$

Genauso sieht man, dass $H_*^{sing}(\cdot; M)$ Koprodukte erhält:

Satz II.5.2 (H_*^{sing}, ∂_*) erfüllt das **Additivitätsaxiom**:
 Die Inklusionen $X_j \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$ stiften einen Iso.

$$\bigoplus_{i \in I} H_n(X_i) \cong H_n(X) \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Bemerkung: Bereits in Hausaufgabe 4.4 gesehen:

Jede Homologietheorie erfüllt **endliche Additivität**.

• H_*^{sing} erhält i. A. keine Pushouts. Man hat aber

$$\text{für } \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & Y \\ \downarrow \text{Kofaserung} & \text{f.} & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\gamma} & Z \end{array} \text{ eine L.E.S. (später).}$$

Satz II.5.3 $H_0^{sing}(X; M) \cong \bigoplus_{\pi_0 X} M.$

Bew. Nach 4.25 bleibt z.z. $H_0(X; M) \cong M$, falls X wegzögl. (und nichtleer). Wir **augmentieren** den Kettenkomplex $C_*^{sing}(X; R)$ durch

$$\varepsilon: C_0^{sing}(X; R) \rightarrow R, \sum_i r_i \sigma_i^0 \mapsto \sum_i r_i.$$

klar: ε ist surjektiv. Beh. $\ker \varepsilon = \text{Bild } \partial_1$.

" $\supseteq$ ": klar. " $\subseteq$ ": Sei $\varepsilon(\sum_i r_i \sigma_i^0) = 0$, d.h. $\sum_i r_i = 0$.

Wähle $x_0 \in X$ und Pfade $\gamma_i: I \rightarrow X$ mit $\gamma_i(0) = x_0$ und $\gamma_i(1) = \sigma_i^0(v_0) \in X$. Interpretiere γ_i als $\sigma_i^1: \Delta^1 \rightarrow X$,

dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_1 \left(\sum_i r_i \sigma_i^1 \right) &= \sum_i r_i \left(\sigma_i^1|_{[v_1]} - \sigma_i^1|_{[v_0]} \right) = \\ &= \sum_i r_i \sigma_i^1|_{[v_1]} - \left(\sum_i r_i \right) \cdot \sigma_i^1|_{[v_0]} = \sum_i r_i \sigma_i^0. \end{aligned}$$

Also ist

$$C_1^{\text{sing}}(X; \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial_1} C_0^{\text{sing}}(X; \mathbb{R}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{R} \rightarrow 0$$

exakt und bleibt exakt nach Anwenden von $(\cdot) \otimes_{\mathbb{R}} M$.

Es folgt

$$\begin{aligned} H_0^{\text{sing}}(X; M) &= C_0^{\text{sing}}(X; M) / \text{Bild}(\partial_1 \otimes \text{id}_M) = \\ &= C_0^{\text{sing}}(X; M) / \text{Ker}(\varepsilon \otimes \text{id}_M) \cong M. \quad \square \end{aligned}$$

Sei X nichtleer. Betrachte wieder Wege $f: I \rightarrow X$ als $f: \Delta^1 \rightarrow X$. Dann ist f ein 1-Zykel g.d.w. f eine Schleife ist.

Satz II.5.4 (Satz von Hurewicz in Grad eins)

$$\begin{aligned} \text{Hur}: \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow H_1^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z}) \\ [f] &\longmapsto f + B_1^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus und natürlich bzgl. punktierter Abb. Falls X wegzugl. ist, induziert Hur einen Iso.

$$\text{Hur}_{\text{ab}}: \pi_1(X, x_0)_{\text{ab}} \xrightarrow{\cong} H_1^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z}),$$

d.h. $\text{Ker Hur} = [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$.

Bew. Wohldefiniert: Sei $[S^1] := \left[\begin{array}{c} I \cong \Delta^1 \rightarrow S^1 \\ t \mapsto e^{\pi i t} \end{array} \right] \in H^1(S^1; \mathbb{Z})$
die Fundamentalklasse von S^1 . Dann gilt

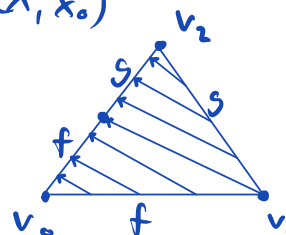
$$\text{Hur}([f]) = H_1^{\text{sing}}(\bar{f})([S^1])$$

mit $\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & \uparrow \bar{f} & \\ \mathbb{I}/\partial\mathbb{I} & \cong & S^1 \end{array}$, also folgt die Wohldefiniertheit
aus Satz 4.11.

Homomorphismus: Seien $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$

Sei $\sigma^2: \Delta^2 \rightarrow X$ gegeben durch

$$[v_0, v_1, v_2] \xrightarrow{\text{proj.}} [v_0, v_2] \xrightarrow{f} X :$$



Es gilt $\partial\sigma^2 = g - fg + f \in B_1(X)$, d.h.

$$[fg] = [f] + [g] \text{ in } H_1^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z}).$$

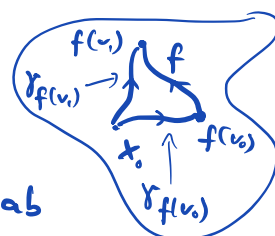
Natürlichkeit: Für $g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ gilt

$$\begin{aligned} H_1^{\text{sing}}(g)(\text{Hur}([f])) &= H_1^{\text{sing}}(g)(H_1^{\text{sing}}(\bar{f})([S^1])) = \\ &= H_1^{\text{sing}}(g \circ \bar{f})([S^1]) = \text{Hur}([g \circ f]) = \\ &= \text{Hur}(\pi_1(g)([f])). \end{aligned}$$

Sei nun X wegzahlgel. Wähle $\gamma_x: I \rightarrow X$, $\gamma_x(0) = x_0$,
 $\gamma_x(1) = x$ für alle $x \in X$ und $\gamma_{x_0} = c_{x_0}$. Definiere

$$\psi: C_1^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1(X, x_0)_{\text{ab}}$$

$$(f: \Delta^1 \cong I \rightarrow X) \mapsto [\gamma_{f(v_0)} \cdot \overline{\gamma_{f(v_1)}}]_{\text{ab}}$$



z.z.: Für alle $\sigma^2 \in C_2^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z})$ gilt $\partial\sigma^2 \in \text{Ker } \psi$.

Seien f, g, h die Seiten von σ^2 . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \psi(\partial\sigma^2) &= \psi(f - g + h) = \psi(f) - \psi(g) + \psi(h) = \\
 &= [\gamma_{\sigma^2(v_1)} + \overline{\gamma_{\sigma^2(v_1)}} \gamma_{\sigma^2(v_2)} - \gamma_{\sigma^2(v_0)} \overline{\gamma_{\sigma^2(v_0)}} + \gamma_{\sigma^2(v_1)} \overline{\gamma_{\sigma^2(v_1)}}]_{ab} \\
 &= [\gamma_{\sigma^2(v_1)} + \overline{\gamma_{\sigma^2(v_1)}}]_{ab} = [c_{x_0}]_{ab}, \text{ weil die} \\
 &\text{Schleife } f\bar{g}h \text{ durch das Innere von } \sigma^2 \text{ zu} \\
 &\text{einer konstanten Schleife homotop ist.}
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{Erhalten } \overline{\psi}: H_1^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1(X, x_0)_{ab}.$$

$$\text{z.z.: } \overline{\psi} \circ \text{Hur}_{ab} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)_{ab}} \text{ und } \text{Hur}_{ab} \circ \overline{\psi} = \text{id}_{H_1^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z})}.$$

$$\begin{aligned}
 \overline{\psi}(\text{Hur}_{ab}([f]_{ab})) &= \overline{\psi}(f + B_1) = [c_{x_0} + \overline{c_{x_0}}]_{ab} = \\
 &= [f]_{ab}
 \end{aligned}$$

$$\text{Haben Fortsetzung } \gamma: C_0^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow C_1^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z}).$$

$$\text{Für } c \in C_1^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z}) \text{ folgt } \text{Hur}_{ab}(\psi(c)) = c + \gamma(\partial c) + B_1.$$

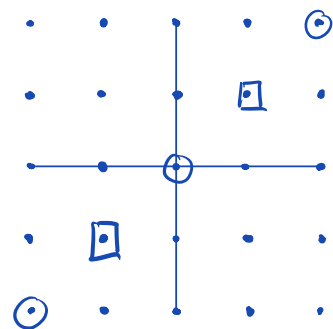
$$\text{Daher } \text{Hur}_{ab}(\overline{\psi}(z + B_1)) = z + \gamma(\partial z) + B_1 = z + B_1. \quad \square$$

$$\begin{aligned}
 \text{Bsp.: } H_1^{\text{sing}}(\Sigma_g; \mathbb{Z}) &\cong \pi_1(\Sigma_g, \cdot)_{ab} \cong \\
 &\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \rangle_{ab} \cong \mathbb{Z}^{2g}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_1^{\text{sing}}(K; \mathbb{Z}) &= \langle a, b \mid a^2 b^2 \rangle_{ab} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \langle (2, 2) \rangle \cong \\
 &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$\cdot \text{ Für } f: I \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi i t} \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Hur}_{ab}([f]) &= H_1^{\text{sing}}(\text{id}_{S^1})([S^1]) \\
 &= [S^1], \text{ also } H_1^{\text{sing}}(S^1; \mathbb{Z}) = \langle [S^1] \rangle.
 \end{aligned}$$



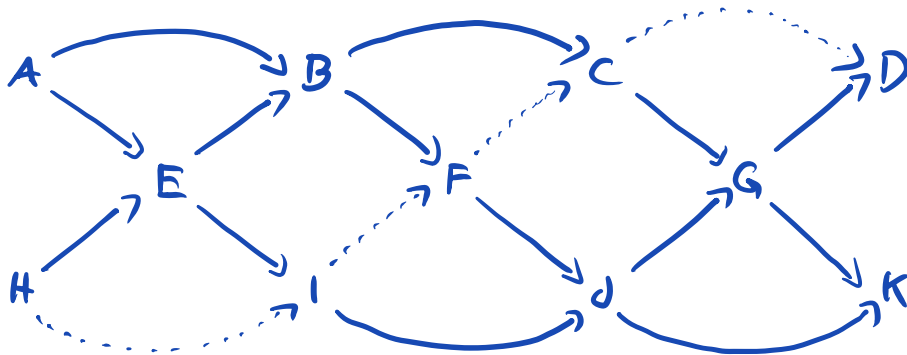
III Homologie: Berechnung und Anwendungen

Ziel: Entwickle Berechnungsmethoden nur aus den Axiomen. Beispiele und Anwendungen

III.1 Relative und absolute Homologie

Ziel: Kläre den Zusammenhang von $H_n(X, A)$ und $H_n(X/A)$. Konstruiere den Einhängungsiso. und berechne die Homologie der Sphären.

Lemma III.1.1 (Zopf-Lemma) Betrachte



in R -Mod. Die durchgezogenen Stränge seien exakt, der gepunktete Strang sei ein Kettenkomplex. Dann ist auch der gepunktete Strang exakt.

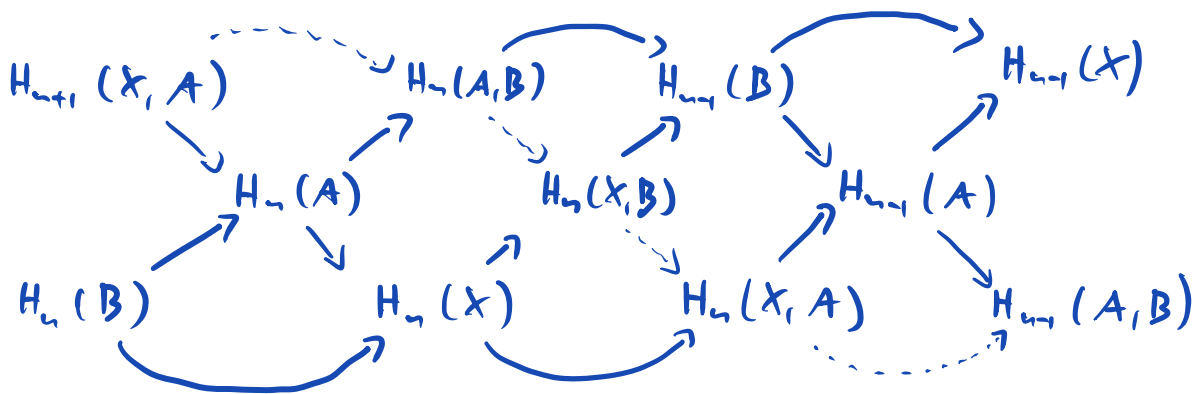
Beweis: Diagrammjagd. z.B. exakt bei I: Sei $i \in \ker u_I$. Dann $d_F(u_I(i)) = 0$, also gibt es $e \in E$ mit $d_E(e) = i$, daher $d_B(u_E(e)) = 0$ und es gibt $a \in A$ mit $u_A(a) = u_E(e)$. Weil $u_E(e - d_A(a)) = u_E(e) - u_A(a) = 0$, gibt es $h \in H$ mit $u_H(h) = e - d_A(a)$. Somit $d_H(h) = d_E(u_H(h)) = d_E(e - d_A(a)) = i \in \text{Bild } d_H$. $\square$

Sei nun (H_*, ∂_*) eine Homologietheorie mit Werten in $\mathbb{R}$ -Mod.

Satz III.1.2 (Tripelfolge) Für jedes Rauntripel (X, A, B) gibt es eine nat. exakte Folge

$$\cdots \rightarrow H_n(A, B) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A, B) \rightarrow \cdots$$

Def. Define $\partial_n: H_n(X, A) \xrightarrow{\partial(X, A)} H_{n-1}(A) \rightarrow H_{n-1}(A, B)$.



Nach z.z.: $H_n(A, B) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_n(X, A)$ est null.

$$H_n(A) \xrightarrow{id} H_n(A) \xrightarrow{\circ} H_n(A, A) \xrightarrow{\circ} H_{n-1}(A) \xrightarrow{id} H_{n-1}(A)$$

- Betrachte: $H_*: \text{Top.} \rightarrow \underline{\text{R-Mod}}$, $(X, x_0) \mapsto H_*(X, x_0)$
- $(\cdot, \cdot)$ ist ein **Nullobjekt** (initial und terminal)
- $H_*(\cdot, \cdot) = 0$ (s. Hausaufgabe)

→ Suchen eine Modifizierung $\tilde{H}_*$ von H_* mit $\tilde{H}_*(\cdot) = 0$.

Def. III.1.3 Die n -te **reduzierte Homologie** von $X \neq \emptyset$ ist

$$\tilde{H}_n(X) = \ker(H_n(X) \rightarrow H_n(\cdot)).$$

- Funktorial, denn
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & \bullet & \end{array} \leadsto \begin{array}{ccc} H_n(X) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(Y) \\ & \searrow & \swarrow \\ & H_n(\bullet) & \end{array}$$
- f nullhomotop $\Rightarrow \tilde{H}_*(f) = 0$, denn $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & \bullet & \end{array} \in \underline{HoTop}$

Sei nun $x_0 \in X$, $r: X \rightarrow \{x_0\}$, $j: (X, x_0) \rightarrow (X, \emptyset)$.

$$0 \rightarrow H_n(x_0) \xrightarrow{\underbrace{H_n(r)}} H_n(X) \xrightarrow{\underbrace{H_n(j)}} H_n(X, x_0) \rightarrow 0$$

$$H_n(j)|_{\text{Ker } H_n(r)}: \text{Ker } H_n(r) \xrightarrow{\cong} H_n(X, x_0)$$

$$\leadsto \boxed{\tilde{H}_n(X) \cong H_n(X, x_0), \quad H_n(X) \cong \tilde{H}_n(X) \oplus H_n(\bullet)}$$

Ist (H_*, ∂_*) gewöhnlich, folgt

$$\begin{aligned} H_0(X) &\cong \tilde{H}_0(X) \oplus H_0(\bullet) \quad \text{und} \\ H_n(X) &\cong \tilde{H}_n(X) \quad \text{für } n \neq 0 \end{aligned}$$

Prop. III.1.4 Sei (X, A) eine Kofaserung. Dann induziert die Kollabierabbildung $q: (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ $\exists$ so, dass $H_n(X, A) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_n(X/A)$.

Zur Vorbereitung:

Lemma III.1.5 Sei

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \text{\scriptsize } i & \text{\scriptsize } \Gamma & \downarrow \text{\scriptsize } j \\ X & \xrightarrow{\bar{f}} & Z \end{array}$$

ein Pushout in Top. Ist i die Inklusion eines abg. Teilraums, so auch j und $X \setminus A \cong Z \setminus Y$.

Bew. 1.) $Z \cong X \amalg Y / f(a) \sim i(a)$. Also gilt nur $j(\gamma_1) = j(\gamma_2)$, falls $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Bild } f$ und falls es $a_i \in f^{-1}(\gamma_i)$ gibt mit $i(a_1) = i(a_2)$. Ist i injektiv, tritt dies nicht ein und j ist ebenfalls injektiv. z.z.: j ist abgeschlossen. Sei also $C \subseteq Y$ abgeschlossen. Dann ist $j(C)$ abg., denn

$$(\bar{f} \amalg j)^{-1}(j(C)) = i(f^{-1}(C)) \amalg C$$

ist abg., weil i abg.. Weil $\bar{f} \amalg j$ eine Identifizierung ist, ist $j(C)$ abg. $\square$

2.) $\bar{f}|_{X \setminus A} : X \setminus A \rightarrow Z \setminus Y$ ist eine stetige Bijektion. Sei $U \subseteq X \setminus A$ offen. Dann ist $U \subseteq X$ offen, weil A abg. ist. Weil $\bar{f} \amalg j$ identifiziert, ist $\bar{f}(U) \subseteq Z$ offen und auch $\bar{f}(U) \subseteq Z \setminus Y$ offen, weil $Y \subseteq Z$ abg. $\square$

Bew. (von Prop. III.2.4) Betrachte

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow \bar{f} & & \downarrow \\ M_i & \longrightarrow & C_i \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{laut Lemma III.1.5} \\ \text{ist } M_i \setminus A \cong C_i \setminus \bullet \text{ und also} \\ (M_i \setminus A, A \times [0, 1)) \cong (C_i \setminus \bullet, CA \setminus \bullet). \end{array}$$

Weil (X, A) starker Deformationsretract von

$(M_i \setminus A, A \times [0, 1))$ ist, haben wir

$$\begin{array}{ccc} (X, A) & \xrightarrow{\varphi} & (X/A, A/A) \\ \cong \downarrow & & \uparrow \cong \text{(Satz IV.4.6, Einf. Top.)} \\ (C_i \setminus \bullet, CA \setminus \bullet) & \rightarrow & (C_i, CA), \end{array}$$

also faktorisiert $H_*(\varphi)$ durch Iso. lt. Homotopieinvarianz und Ausschneidung. $\square$

Satz III.1.6 Sei (X, A) eine nichtleere Kofaserung.

Dann haben wir eine nat. L.E.S.

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_n(A) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(X/A) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \cdots$$

Bew. Wähle $a_0 \in A$ und betrachte die Tripelfolge

$$\begin{array}{ccccc} \cdots \rightarrow H_n(A, a_0) & \rightarrow & H_n(X, x_0) & \rightarrow & H_n(X, A) \rightarrow \cdots \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \text{ III.1.4} \\ \tilde{H}_n(A) & & \tilde{H}_n(X) & & \tilde{H}_n(X/A) \end{array} \quad \square$$

Ein punktiertes Raum (X, x_0) heißt **wohlpunktiert**, falls (X, x_0) eine Kofaserung ist. Ist (X, x_0) wohlpunktiert und (Y, y_0) punktiert, so ist $(X \vee Y, Y)$ eine Kofaserung, aber

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\quad} & Y \\ \downarrow \Gamma & & \downarrow \\ X & \rightarrow & X \vee Y \end{array} \quad \text{und:}$$

Lemma III.1.7 Sei

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i & \Gamma & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{\bar{f}} & Z \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ein Pushout in Top. Ist } i \text{ eine Kofaserung} \\ \text{so auch } j. \end{array}$$

Bew.: Sei $H: Y \times I \rightarrow W$, $g: Z \rightarrow W$

mit $g \circ j = H_0$. Weil i eine Kofaserung ist, setzt sich $H_0 \circ (f \times \text{id}_I)$ mit

Aufbed. $g \circ \bar{f}$ zu H' fort.

Dann ist H' die gesuchte Fortsetzung von H bzgl. g . $\square$

Bemerkung: Mit vorherigem Lemma:

$$\begin{array}{ccccc} A \times I & \xrightarrow{f \times \text{id}} & Y \times I & & \\ \downarrow i \times \text{id} & \Gamma & \downarrow j \times \text{id} & & \downarrow H \\ X \times I & \xrightarrow{\bar{f} \times \text{id}} & Z \times I & & \\ & & \downarrow \exists! & & \downarrow H'' \\ & & & & W \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{--- } H' \text{ ---} \\ \text{--- } \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A \rightarrow Y \\ \downarrow i \quad \downarrow j \\ X \rightarrow Z \end{array} \quad i \text{ NDR} \Rightarrow j \text{ NDR.} \quad \square$$

Betrachte $Y \xrightleftharpoons[r_Y]{i_Y} X \vee Y$, also

$$\cdots \xrightarrow{\circ} \tilde{H}_n(Y) \xrightarrow{\quad} \tilde{H}_n(X \vee Y) \xrightarrow{\quad} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\circ} \tilde{H}_{n-1}(Y) \rightarrow \cdots$$

Es folgt $\boxed{\tilde{H}_n(X \vee Y) \cong \tilde{H}_n(X) \oplus \tilde{H}_n(Y)}$, d.h.

$\tilde{H}_*$ erhält endliche Koprodukte in $\underline{\text{Top}}^{\text{well}}$.

(Später: Ist H_* additiv, erhält $\tilde{H}_*$ auch unendliche Koprodukte in $\underline{\text{Top}}^{\text{well}}$.)

Def III.18 Sei X ein top. Raum, $X \subseteq CX$ die Basis-inclusion in den Kegel. Dann heißt $SX := CX/X$ die Einhängung von X .

Alternative Beschreibung:

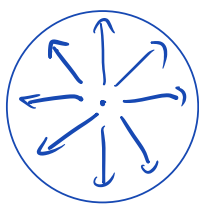
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & CX \\ \downarrow \Gamma & & \downarrow \\ CX & \xrightarrow{\quad} & SX \end{array}$$



Bsp. $S(S^{n-1}) = S^n$. Genauer

$$S(S^{n-1}) = CS^{n-1}/S^{n-1} = D^n/S^{n-1} \stackrel{\cong}{=} S^n,$$

$$u_n(tx_1, \dots, tx_n) = (ux_1, \dots, ux_n, 2t-1), \quad u = \sqrt{1-(2t-1)^2}.$$



Es gilt auch $S(S^{-1}) = S(\emptyset) = C\emptyset/\emptyset = (\emptyset/\emptyset)/\emptyset = \emptyset/\emptyset \stackrel{u_0}{=} \dots = S^0$.

Notiz. $S: \text{Top} \rightarrow \text{Top}$ ist ein Funktor.

Satz III.1.9 $\tilde{H}_n(X) \cong \tilde{H}_{n+1}(SX)$ nat. in $X \neq \emptyset$.

Bew. Weil (CX, X) eine Kofaserung ist, erhalten wir aus 5.7

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(CX) \xrightarrow{\circ} \tilde{H}_{n+1}(SX) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\circ} \tilde{H}_n(CX) \rightarrow \dots,$$

denn $\tilde{H}_*(CX) \cong \tilde{H}_*(\cdot) = 0$. $\square$

Korollar III.1.10 $H_k(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_k(S^n) \cong H_{k-n}(\cdot)$, d.h.
 $H_k(S^n) \cong H_{k-n}(\cdot) \oplus H_k(\cdot)$. Ist H_* gewöhnlich, folgt

$$H_k(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} H_0(\cdot) & \text{für } k=n \\ 0 & \text{für } k \neq n, \end{cases}$$

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} H_0(\cdot) & \text{für } k=0 \text{ oder } k=n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } n > 0,$$

$$H_0(S^0) \cong H_0(\cdot) \oplus H_0(\cdot).$$

Bew. $H_k(D^n, S^{n-1}) \stackrel{\text{III.1.6}}{\cong} \tilde{H}_k(D^n/S^{n-1}) \stackrel{u_n}{\cong} \tilde{H}_k(S^n) \stackrel{\text{Bsp.}}{\cong} \tilde{H}_k(S^n(S^0)) \cong$
 $\stackrel{\text{III.1.9}}{\cong} \tilde{H}_{k-n}(S^0) \stackrel{\cong}{\cong} H_{k-n}(S^0, \cdot) \stackrel{\text{Aus.}}{\cong} H_{k-n}(\cdot)$. $\square$

Def. III.1.11 Für (X, x_0) ist $\Sigma X := SX / [\{x_0\} \times I]$ die reduzierte Einhängung.



$\Sigma: \text{Top.} \rightarrow \text{Top.}$ ist ein Funktor.

Falls (X, x_0) wohlpunktiert ist, gilt $\Sigma X \simeq SX$, d.h.

$$\tilde{H}_{n+1}(\Sigma X) \cong \tilde{H}_n(X)$$

für wohlpunktierte Räume. Reduzierte Einhängung ist linksadjungiert zum Schleifenraum-Funktor Ω ,

$$\text{Hom}_{\text{Top}}(\Sigma(X, x_0), (Y, y_0)) \cong \text{Hom}_{\text{Top}}((X, x_0), \Omega(Y, y_0)),$$

$\Omega: \text{Top}_* \rightarrow \text{Top}_*$, $\Omega(X, x_0) = \text{Hom}_{\text{Top}}(S^1, \cdot), (X, x_0)$ mit KO-Topologie ($\text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y)$ hat Subbasis $\{f: X \rightarrow Y: f(K) \subseteq U\}$ für $K \subseteq X$ kompakt, $U \subseteq Y$ offen.) Die Adjunktion respektiert Homotopie und wir erhalten so auch eine Adjunktion in HoTop . Für $(X, x_0) = (S^n, \cdot)$ besagt diese

$$\pi_{n+1}(Y, y_0) \cong \pi_n(\Omega(Y, y_0))$$

$$(\text{vgl. } \tilde{H}_{n+1}(\Sigma X) \cong \tilde{H}_n(X).)$$

→ Hinweis auf homotopietheoretische Konstruktion von Homologie durch "Spektren".

III.2 Gleichheit von simplizialer und singularer Homologie

Ziel: Zeige $H_n^A(X, A; R) \cong H_n^{\text{sing}}(X, A; R)$ für Δ -Paare (X, A) .

(Unterdrücken R in der Notation.)

Aus III.1.10 wissen wir $H_n^{\text{sing}}(\Delta^n, \partial \Delta^n) \cong R$.

Prop III.2.1 $H_n^{\text{sing}}(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong \mathbb{R}$ wird erzeugt von $[id_{\Delta^n}]$.

Bew. Induktion nach n . Anfang $n=0$ klar. Schritt:

Sei $\Lambda = \partial\Delta^n \setminus [v_1, \dots, v_n]$ das unkultte Horn von Δ^n .

$$H_n^{\text{sing}}(\Delta^n, \partial\Delta^n) \stackrel{\text{III.1.2}}{\cong} H_{n-1}^{\text{sing}}(\partial\Delta^n, \Lambda) \stackrel{\text{III.1.4}}{\cong} \tilde{H}_{n-1}^{\text{sing}}(\partial\Delta^n / \Lambda) \\ \cong \tilde{H}_{n-1}^{\text{sing}}(\Delta^{n-1} / \partial\Delta^{n-1}) \stackrel{\text{III.1.4}}{\cong} H_{n-1}^{\text{sing}}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}).$$

Dieser Iso. bildet $[id_{\Delta^n}]$ auf $[id_{\Delta^{n-1}}]$ ab. Also ist $[id_{\Delta^n}]$ Erzeuger nach Ind. von. $\square$

Lemma III.2.2 (Ser-Lemma) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{\ell} & E \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \varepsilon \downarrow \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{\ell'} & E' \end{array}$$

in $\mathbb{R}$ -Mod habe exakte Zeilen, α sei surjektiv, ε sei injektiv und β und δ seien Iso. Dann ist auch γ ein Iso.

Bew. Diagrammjagd. γ injektiv: Sei $c \in \text{Ker } \gamma$.

Dann gilt $0 = k'(\gamma(c)) = \delta(k(c))$, also $k(c) = 0$, weil

δ inj. Wegen Exaktheit bei C gibt es $b \in B$ mit $j(b) = c$.

Wir haben $j'(\beta(b)) = \gamma(j(b)) = \gamma(c) = 0$, also gibt es

$a' \in A'$ mit $i'(a') = \beta(b)$. Weil α surj., gibt es

$a \in A$ mit $\alpha(a) = a'$. Es gilt $\beta(b - i(a)) =$

$= i'(a') - i'(\alpha(a)) = 0$. Weil β inj., folgt $b = i(a)$,

d.h. $c = j(b) = j(i(a)) = 0$ lt. Exaktheit bei B .

γ surjektiv: selbst. $\square$

Sei nun (X, A) ein Δ -Paar. Betrachte die Kettenabb.

$$C_n^\Delta(X, A) \longrightarrow C_n^{\partial\Delta}(X, A),$$

die einen Simplex in X als sing. Simplex interpretiert.

Satz III.2.3 Der induzierte Homomorphismus

$$H_n^\Delta(X, A) \xrightarrow{\cong} H_n^{\partial\Delta}(X, A)$$

ist ein Isomorphismus für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Bew. Sei zunächst $A = \emptyset$. Betrachte

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H_n^\Delta(X^{l-1}) & \rightarrow & H_n^\Delta(X^l) & \rightarrow & H_n^\Delta(X^l, X^{l-1}) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \alpha \downarrow \end{array}$$

$$\dots \rightarrow H_n^{\partial\Delta}(X^{l-1}) \rightarrow H_n^{\partial\Delta}(X^l) \rightarrow H_n^{\partial\Delta}(X^l, X^{l-1}) \rightarrow \dots$$

z. z.: α ist ein Iso.

Weil $C_2^\Delta(X^n, X^{n-1}) = 0$ für $l \neq n$, gilt $H_n^\Delta(X^l, X^{l-1}) \cong$

$$\cong C_n^\Delta(X^l, X^{l-1}) \cong \begin{cases} \bigoplus_{\sigma \in \sigma_n} R \sigma_n & \text{für } l = n \\ 0 & \text{für } l \neq n. \end{cases}$$

Außerdem haben wir

$$\left(\coprod_{\alpha} \Delta_{\alpha}^l, \coprod_{\alpha} \partial \Delta_{\alpha}^l \right) \xrightarrow{\Phi} (X^l, X^{l-1})$$

$$\left(\coprod_{\alpha} \Delta_{\alpha}^l / \coprod_{\alpha} \partial \Delta_{\alpha}^l, \cdot \right) \xrightarrow{\cong} (X^l / X^{l-1}, \cdot)$$

und (X^l, X^{l-1}) ist eine Kofaserung nach

Lemma III.1.7, denn

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\alpha} \partial \Delta_{\alpha}^l & \xrightarrow{\quad} & X^{l-1} \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \coprod_{\alpha} \Delta_{\alpha}^l & \xrightarrow{\quad} & X^l \end{array}$$

Mit Prop. III.2.4 ist $H_n^{\text{sing}}(\Phi)$ ein Iso.

Aus der Additivität von H_n^{sing} ergibt sich

$$\begin{array}{ccccc} \cdots \rightarrow \bigoplus_{\alpha} H_n^{\text{sing}}(\Delta_{\alpha}^1) & \rightarrow & \bigoplus_{\alpha} H_n^{\text{sing}}(\Delta_{\alpha}^1, \partial \Delta_{\alpha}^1) & \rightarrow & \bigoplus_{\alpha} H_{n-1}^{\text{sing}}(\partial \Delta_{\alpha}^1) \rightarrow \cdots \\ \downarrow \cong & & \beta \downarrow & & \downarrow \cong \\ \cdots \rightarrow H_n^{\text{sing}}(\bigsqcup_{\alpha} \Delta_{\alpha}^1) & \rightarrow & H_n^{\text{sing}}(\bigsqcup_{\alpha} \Delta_{\alpha}^1, \bigsqcup_{\alpha} \partial \Delta_{\alpha}^1) & \rightarrow & H_{n-1}^{\text{sing}}(\bigsqcup_{\alpha} \partial \Delta_{\alpha}^1) \rightarrow \cdots \end{array}$$

Mit dem Ser-Lemma ist auch β ein Iso.

Mit Prop. III.2.1 schließen wir

$$H_n^{\text{sing}}(X^k, X^{k-1}) \cong \begin{cases} \bigoplus_{\sigma_{\alpha}^n} \mathbb{R}[\text{id}_{\Delta_{\alpha}^1}] & \text{für } k=1 \\ 0 & \text{für } k \neq 1. \end{cases}$$

Weil α die Erzeuger aufeinander abbildet, ist α ein Iso.

Weil offensichtlich $H_n^{\Delta}(X^0) \xrightarrow{\cong} H_n^{\text{sing}}(X^0)$, folgt mit Ser-Lemma durch vollständige Induktion, dass

$$H_n^{\Delta}(X^k) \xrightarrow{\cong} H_n^{\text{sing}}(X^k)$$

für alle $k \geq 0$ und somit

Nutze $\sigma^{-1}(\Delta^1) \subseteq X$
ist kompakt, also
 $\sigma^{-1}(\Delta^1) \subseteq X^k$ für $k \gg 0$.

$H_n^{\Delta}(X) \cong \text{colim}_k H_n^{\Delta}(X^k) \cong \text{colim}_k H_n^{\text{sing}}(X^k) \cong H_n^{\text{sing}}(X)$
 $H_n^{\Delta}(X, A) \cong H_n^{\text{sing}}(X, A)$ für $A \neq 0$ folgt erneut aus dem Ser-Lemma. □

Bemerkung: Definieren wir $C_{*}^{\Delta}(X, A; M) := C_{*}^{\Delta}(X, A) \otimes_{\mathbb{R}} M$
für einen $\mathbb{R}$ -Modul M , folgt genauso
 $H_n^{\Delta}(X, A; M) \cong H_n^{\text{sing}}(X, A; M).$

Korollar III.2.4 Lässt ein Raumpaar (X, A) eine Δ -Paar-Struktur zu mit endlich vielen Simplexen außerhalb von A und ist R ein Hauptidealring, dann ist $H_n^{pi}(X, A; R)$ endlich präsentiert.

Bew. Nach dem Satz gilt

$$H_n^{pi}(X, A; R) \cong \mathbb{Z}_n^\Delta(X, A; R) / B_n^\Delta(X, A; R)$$

und nach Vor. ist $C_n^\Delta(X, A; R) \cong R^{\mathbb{Z}}$ über Hauptidealringen sind Untermoduln freier Moduln mit endlichem Rang wieder frei mit endlichem Rang. $\square$

III.3 Die Mayer-Vietoris-Folge

Ziel: Für $Z = U_1 \cup U_2$ oder $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & Y \\ \downarrow \Gamma & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\gamma} & Z \end{array}$, entwickle L.E.S.,

die $H_*(Z)$ mit $H_*(U_1)$, $H_*(U_2)$ bzw. $H_*(A)$, $H_*(X)$, $H_*(Y)$ in Verbindung setzt.

Sei wieder (H_*, ∂_*) eine Homologietheorie mit Werten in R -Mod.

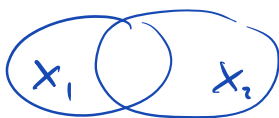
Def. III.3.1 Seien $X_1, X_2 \subseteq X$ Teilräume mit $X = X_1 \cup X_2$.

Dann heißt die Triade $(X; X_1, X_2)$ **schnittig**, falls die Inklusion $(X_1, X_1 \cap X_2) \rightarrow (X, X_2)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ einen Iso. $H_n(X_1, X_1 \cap X_2) \cong H_n(X, X_2)$ induziert.

Bem. $(X; X_1, X_2)$ schnittig $\Leftrightarrow (X; X_2, X_1)$ schnittig.
(Diagrammjagd.)

Bsp. Sind X_1, X_2 offen, $X = X_1 \cup X_2$, so ist $(X; X_1, X_2)$ schneidend, denn für $Y = X_2$, $A = X \setminus X_2$ gilt $\bar{A} = A \subseteq \overset{\circ}{Y} = Y$ und nach Aussch. axiom haben wir

$$H_n(X \setminus A; Y \setminus A) \cong H_n(X_1, Y)$$

$$H_n(X_2, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\cong} H_n(X, X_2)$$


Satz III.3.2 (Mayer-Vietoris-Folge) Für $(X; X_1, X_2)$ schneidend und $A \subseteq X_2 \cap X_2 := X_0$ gibt es eine nat. L.E.S.

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(X_0, A) \xrightarrow{(H_n(i_1), H_n(i_2))} H_n(X_1, A) \oplus H_n(X_2, A) \xrightarrow{H_n(j_1) - H_n(j_2)} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

mit $i_k: (X_0, A) \rightarrow (X_k, A)$ und $j: (X_k, A) \rightarrow (X, A)$, $k=1,2$.

Bew. Natürlichkeit der Tripelfolge ergibt

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(X_0, A) & \xrightarrow{H_n(i_1)} & H_n(X_1, A) & \xrightarrow{H_n(l_1)} & H_n(X_1, X_0) & \xrightarrow{\partial_n'} & H_{n-1}(X_0, A) \rightarrow \\ & \downarrow H_n(i_2) & \downarrow H_n(j_1) & \xrightarrow{\partial_n} & \downarrow \cong & \xrightarrow{\partial_n''} & \downarrow \\ H_n(X_2, A) & \xrightarrow{H_n(j_2)} & H_n(X, A) & \xrightarrow{H_n(l_2)} & H_n(X, X_2) & \xrightarrow{\partial_n''} & H_{n-1}(X_2, A) \rightarrow \end{array}$$

Definieren ∂_n wie eingezeichnet. Natürlichkeit von ∂_n folgt aus Natürlichkeit der Tripelfolge (und ist sonst klar.) Exaktheit: Diagrammjagd.

Bei $H_{n-1}(X_0, A)$: Sei $z \in \text{Ker } H_{n-1}(i_1) \cap \text{Ker } H_{n-1}(i_2)$.

Dann gibt es $z_1 \in H_n(X_1, X_0)$ mit $\partial_n'(z_1) = z$.

Betrachte z_1 als Element in $H_n(X, X_2) \cong H_n(X_1, X_0)$.

Dann gilt $\partial_n''(z_2) = 0$, also gibt es $z_2 \in H_n(X, A)$

mit $H_n(l_2)(z_2) = z_1$. Damit folgt $\partial_n(z_2) =$

$= \partial_n'(H_n(l_2)(z_2)) = \partial_n'(z_1) = z$, also $z \in \text{Bild } \partial_n$.

Sei umgekehrt $z \in \text{Bild } \partial_n$, also auch $z \in \text{Bild } \partial_n'$
 und deshalb $H_{n-1}(i_1)(z) = 0$. Außerdem folgt für
 $z = \partial_n'(H_n(l_2)(z_1))$, dass $H_{n-1}(i_2)(z) = \partial_n''(H_n(l_2)(z)) =$
 $= 0$, also $z \in \text{Ker } H_{n-1}(i_1) \cap \text{Ker } H_{n-1}(i_2)$.
 Exaktheit an den anderen zwei Stellen: selbst! $\square$

Erinnerung: ein homotopiekommutatives Viereck

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_2} & Y \\ f_1 \downarrow & & \downarrow g_1 \\ X & \xrightarrow{g_1} & Z \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{heißt homotopiekohärent, falls} \\ \text{(oder Homotopie-Pushout), falls} \\ \text{in dem von } g_1 \circ f_1 \approx_h g_2 \circ f_2 \end{array}$$

induzierten Diagramm alle vertikalen Pfeile " $\approx$ " sind

$$\begin{array}{ccccc} A \times I & \longrightarrow & M_{f_2} & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ A & \xrightarrow{f_1} & Y & \xrightarrow{f_2} & Z \\ & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & & X & \longrightarrow & Z \end{array} \quad \begin{array}{l} \approx \\ \approx \end{array}$$

Bsp.: $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_1} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f_2} & Z \end{array}$
 Kofaserung

Satz III.3.3 (Mayer-Vietoris-Folge für Homotopie-Pushouts)

Sei $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_2} & Y \\ f_1 \downarrow & & \downarrow g_1 \\ X & \xrightarrow{g_2} & Z \end{array}$ homotopiekohärent. Dann gibt es eine nat. L.E.S.

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{(H_n(f_1), H_n(f_2))} H_n(X) \oplus H_n(Y) \xrightarrow{H_n(g_1) - H_n(g_2)} H_n(Z) \xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

Bew. Haben

$$\begin{array}{ccccc}
 A \times (0,1) & \longrightarrow & \mathring{M}_{f_2} & & \\
 \cong \downarrow & \searrow & \downarrow \cong & \searrow & \\
 & & \mathring{M}_{f_2} & \xrightarrow{\quad} & M_{f_1, f_2} \\
 A & \xrightarrow{\quad} & Y & \xrightarrow{\quad} & Z \\
 & \searrow & \downarrow \cong & \searrow & \\
 & & X & \xrightarrow{\quad} & Z
 \end{array}$$

und $(M_{f_1, f_2}; \mathring{M}_{f_1}, \mathring{M}_{f_2})$ ist schütting. $\square$

Im Spezialfall $A \xrightarrow{f} Y$ mit einer Kofaserung i

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & Y \\
 i \downarrow & \downarrow f & \downarrow \delta \\
 X & \xrightarrow{\bar{f}} & Z
 \end{array}$$

haben wir für $B \subseteq A$, $B' \subseteq Y$ mit $f(B) \subseteq B'$ die rel. Vers.

$$\cdots \rightarrow H_n(A, B) \rightarrow H_n(X, A) \oplus H_n(Y, B) \rightarrow H_n(Z, B') \rightarrow \cdots$$

Setzen wir $A = \bullet \in X_1 \cap X_2$ in Satz III.3.2, erhalten wir

$$\rightarrow \tilde{H}_n(X_0) \rightarrow \tilde{H}_n(X_1) \oplus \tilde{H}_n(X_2) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \cdots$$

für eine schüttinge Triade $(X; X_1, X_2)$. Der Beweis von Satz III.3.3 liefert somit auch

$$\rightarrow \tilde{H}_n(A) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \oplus \tilde{H}_n(Y) \rightarrow \tilde{H}_n(Z) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \cdots$$

für einen Homotopie-Pushout

$$\begin{array}{ccc}
 A & \rightarrow & Y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \rightarrow & Z
 \end{array}$$

Bsp. $S^1 \rightarrow M$ (Verklebt man zwei Möbiustränder
 $\downarrow \Gamma \quad \downarrow$ am Rand, erhält man eine
 $M \rightarrow K$ kleine Flasche.)

Sei $H_* = H_*^{\text{sing}}(\cdot, \cdot; \mathbb{Z})$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & x \mapsto (2x, 2x) & & & \\ \cdots \rightarrow & H_2(M) \oplus H_2(M) & \rightarrow & H_2(K) & \xrightarrow{0} & H_2(S^1) & \rightarrow H_2(M) \oplus H_2(M) \rightarrow \cdots \\ & \parallel & & \parallel & & \parallel & \\ & 0 & & 0 & & \mathbb{Z} & \\ & & & & & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & x \mapsto (x, x) & & & \\ \rightarrow & H_2(K) & \xrightarrow{0} & H_0(S^1) & \rightarrow & H_0(M) \oplus H_0(M) & \rightarrow H_0(K) \\ & \parallel & & \parallel & & \parallel & \\ & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \\ & & & & & & \mathbb{Z} \end{array}$$

Bsp. $S^{n-2} \xrightarrow{f} Y$ (Zellanheftung)
 $\downarrow \Gamma \quad \downarrow j$
 $D^n \xrightarrow{F} \mathbb{Z}$

Wegen $\tilde{H}_*(D^n) \cong 0$ hat die M.V.-Folge die Gestalt

$$\rightarrow \tilde{H}_k(S^{n-2}) \xrightarrow{\tilde{H}_k(f)} \tilde{H}_k(Y) \xrightarrow{\tilde{H}_k(j)} \tilde{H}_k(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{k-2}(S^{n-2}) \xrightarrow{\tilde{H}_{k-2}(f)} \tilde{H}_{k-2}(Y)$$

$$\leadsto \tilde{H}_k(j) \text{ ist ein Iso} \Leftrightarrow (\tilde{H}_{k-2}(f) \text{ inj. u. } \tilde{H}_k(f)=0)$$

Ist H_* gewöhnlich, ist dies für $k \in \{n, n-1\}$ automatisch.

- $k=n \leadsto k$ -te Homologie kann durch Zellanheftung nur wachsen.
- $k=n-1 \leadsto k$ -te Homologie kann nur schrumpfen.

Wir erfüllen noch eine Bringschuld:

Satz III.3.4 Sei (H_*, d_*) additiv und $\{(X_i, x_i)\}_{i \in I}$ wohlpunktisierte Räume. Dann induzieren $X_i \rightarrow \bigvee_{i \in I} X_i$ $\coprod_{i \in I} \tilde{H}_*(X_i) \cong \tilde{H}_*(\bigvee_{i \in I} X_i)$.

Bew. Additivität, Ser-Lemma und Prop. 5.6 ergeben

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i \in I} \tilde{H}_i(X_i) &\cong \bigoplus_{i \in I} H_i(X_i, x_i) \cong \bigoplus_{i \in I} H_i(\bigvee_{i \in I} X_i, \bigvee_{i \in I} \{x_i\}) \\ &\cong \bigoplus_{i \in I} \tilde{H}_i(\bigvee_{i \in I} X_i). \end{aligned} \quad \square$$

III.4 Der Abbildungsgrad

Ziel: Klassifiziere alle Abb. $f: S^n \rightarrow S^n$ bis auf Homotopie und bestimme die induzierten Morphismen in Homologie.

Def. III.4.1 Der **Abbildungsgrad** von $f: S^n \rightarrow S^n$ ist die eindeutige ganze Zahl $\deg f \in \mathbb{Z}$, sodass

$$\tilde{H}_n^{or}(f)(z) = (\deg f) \cdot z \quad \text{für alle } z \in \tilde{H}_n^{or}(S^n) \cong \mathbb{Z}.$$

Beobachtung: $f \simeq g \Rightarrow \deg f = \deg g$

- f nullhomotop $\Rightarrow \deg f = 0$ (z.B. f nicht surjektiv)
- Für $f, g: S^n \rightarrow S^n$ gilt $\deg(f \circ g) = (\deg f) \cdot (\deg g)$
- f Homotopieäquivalenz $\Rightarrow \deg f = \pm 1$.
- $\deg(\text{id}_{S^n}) = 1$.

Satz III.4.2 Sei (H_*, d_*) eine Homologietheorie mit Werten in $\mathbb{R}$ -Mod, $f: S^n \rightarrow S^n$. Dann ist $\tilde{H}_n(f)(z) = (\deg f) \cdot z$ für alle $z \in \tilde{H}_n(S^n)$.

(Beweis führen wir im Rest des Abschnitts.)

Prop. III.4.3 Sei $n \geq 0$ und sei $\tau_n: S^n \rightarrow S^n$ die Spiegelung an der Hyperebene $\{x_{n+1} = 0\}$, d.h. $\tau_n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$. Dann gilt $\tilde{H}_n(\tau_n) = -\text{id}_{\tilde{H}_n(S^n)}$ und $\deg \tau_n = -1$.

Beweis Induktion nach n . Anfang:

$$\tau_0: (S^0; \{+1\}, \{-1\}) \rightarrow (S^0; \{-1\}, \{+1\})$$

$$i_-: \{-1\} \rightarrow S^0, \quad i_+: \{+1\} \rightarrow S^0$$

$$\sigma := H_0(\{+1\} \rightarrow \{-1\})$$

Natürlichkeit der M.V.-Folge liefert

$$\begin{array}{ccc} H_0(\{+1\}) \oplus H_0(\{-1\}) & \xrightarrow[\cong]{H_0(i_+) - H_0(i_-)} & H_0(S^0) \\ \tau: a \otimes b \mapsto \sigma'(b) \otimes \sigma(a) \downarrow & & \downarrow H_0(\tau_0) \\ H_0(\{+1\}) \oplus H_0(\{-1\}) & \xrightarrow[\cong]{H_0(i_-) - H_0(i_+)} & H_0(S^0) \end{array}$$

$$\text{Sei } D = \{a \oplus \sigma(a) : a \in H_0(\{+1\})\}.$$

Erhalten $\delta: D \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_0(S^0)$ und $\tau|_D = \text{id}_D$, also $\tilde{H}_0(\tau_0) = -\delta \circ \text{id}_D \circ \delta^{-1} = -\text{id}_{\tilde{H}_0(S^0)}$.

Schritt: Sei $\eta: \tilde{H}_n(S^n) \rightarrow \tilde{H}_{n-2}(S^{n-2})$ der nat.

Einhängungsiso. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{H}_n(\tau_n) &= \eta^{-1} \circ \tilde{H}_{n-2}(\tau_{n-1}) \circ \eta \stackrel{\text{I.V.}}{=} \eta^{-1} \circ (-\text{id}_{\tilde{H}_{n-2}(S^{n-2})}) \circ \eta = \\ &= -\text{id}_{\tilde{H}_n(S^n)}. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung: Je zwei Spiegelungen im $\mathbb{R}^{n+1}$ sind homotop, also $\tilde{H}_n(\tau) = -\text{id}$ für jede Spiegelung τ .

Satz III.4.4 Für jedes $f: S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ gibt es $x \in S^{2n}$ mit $f(x) = \pm x$.

Bew. Falls nicht, gibt es Homotopien $\text{id}_{S^{2n}} \approx_F f$ und $f \approx_G -\text{id}_{S^{2n}}$,

$$F(x, t) = \frac{(1-t) \cdot x + t \cdot f(x)}{\|(1-t) \cdot x + t \cdot f(x)\|}$$

$$G(x, t) = \frac{(1-t) \cdot (-x) + t \cdot f(x)}{\|(1-t) \cdot (-x) + t \cdot f(x)\|}$$

also $\text{id}_{S^{2n}} \approx -\text{id}_{S^{2n}} = r^1 \circ \dots \circ r^{2n+1}$, r^i : Spiegelung an i -ter Ebene, also $1 = \deg \text{id}_{S^{2n}} = \deg(r^1 \circ \dots \circ r^{2n+1}) = (-1)^{2n+1} = -1$, Widerspruch. $\square$

Satz III.4.5 (Satz vom Vektorfeld). Jedes tangentielle Vektorfeld auf einer gerade-dimensionalen Sphäre hat eine Nullstelle: Zu $v: S^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ mit $\langle v(x), x \rangle = 0$ für alle $x \in S^{2n}$ gibt es $x_0 \in S^{2n}$ mit $v(x_0) = 0$.

Bew. Falls nicht, gibt es $x_0 \in S^{2n}$ mit $\frac{v(x_0)}{\|v(x_0)\|} = \pm x_0$, d.h. $0 = \frac{\langle v(x_0), x_0 \rangle}{\|v(x_0)\|} = \langle \pm x_0, x_0 \rangle = \pm 1$, Widerspruch. $\square$

Zu jeder Zeit gibt es also auf der Erde einen windstillen Ort.

Prop. III.4.6 Sei $f_2: S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^2$. Dann gilt

$\tilde{H}_2(f_2) = 2 \cdot \text{id}_{\tilde{H}_2(S^1)}$ (über $\deg(f_2) = 2$, vgl. Natürlichkeit des Hurewicz-Isom.).

Bew. Es gilt $f_{-2}(z) = \overline{f_2(z)} = r_2(f_2(z))$. Mit Prop. III.4.3 o.D.d.A. $k \geq 0$. Betrachte

$$\begin{array}{ccc} & \bigvee_{i=1}^k S^1 & \\ g_2 \nearrow & & \searrow \bigvee_{i=1}^k \text{id}_{S^1} \\ S^2 & \xrightarrow{f_2} & S^2 \end{array}$$

Sei außerdem $q_j: \bigvee_{i=1}^k S^1 \rightarrow S^1$ die Abb., die alle Kreise außer dem j -ten kollabiert. Dann gilt $q_j \circ g_2 \simeq \text{id}_{S^2}$, d.h.

$$(\tilde{H}_2(q_2), \dots, \tilde{H}_2(q_k)) \circ \tilde{H}_2(g_2) = (\text{id}_{\tilde{H}_2(S^2)}, \dots, \text{id}_{\tilde{H}_2(S^2)}).$$

Für $i_j: S^2 \rightarrow \bigvee_{i=1}^k S^1$ die j -te Inklusion gilt $(\bigvee_{i=1}^k \text{id}_{S^1}) \circ i_j = \text{id}_{S^1}$, d.h.

$$\tilde{H}_2(\bigvee_{i=1}^k \text{id}_{S^1}) \circ (\tilde{H}_2(i_2) \oplus \dots \oplus \tilde{H}_2(i_k)) = \tilde{H}_2(\text{id}_{S^2}) \oplus \dots \oplus \tilde{H}_2(\text{id}_{S^2}).$$

Wird $(\bigoplus_i \tilde{H}_2(i_j)) \circ (\prod_i \tilde{H}_2(q_i)) = \text{id}_{\tilde{H}_2(\bigvee_i S^1)}$ (s. unter Satz III.2.6), gilt

$$\tilde{H}_2(f_2) = \tilde{H}_2(\bigvee_i \text{id}_{S^2}) \circ \tilde{H}_2(g_2) = \text{id}_{\tilde{H}_2(S^2)} + \dots + \text{id}_{\tilde{H}_2(S^2)} = k \cdot \text{id}_{\tilde{H}_2(S^2)} \quad \square$$

Wegen der Natürlichkeit des Einhängungsprozesses, gilt also auch $\tilde{H}_n(S^{n-2}(f_2)) = k \cdot \text{id}_{\tilde{H}_n(S^n)}$ und insbesondere $\deg(S^{n-2}(f_2)) = k$. Setzen wir $[X, Y] := \text{Hom}_{\text{HoTop}}(X, Y)$, folgt

$$\deg: [S^n, S^n] \rightarrow \mathbb{Z}$$

ist surjektiv. Satz III.4.2 folgt, sobald wir zeigen, dass $\deg$ injektiv ist. Brauchen Anschluss an die Differentialtopologie.

Prop. III.4.7 Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ stetig und $\delta: M \rightarrow \mathbb{R}$ positiv und stetig. Dann gibt es eine glatte Abbildung $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^k$, sodass $\|f(x) - \bar{f}(x)\| < \delta(x)$ für alle $x \in M$.

Bew. Für $x \in M$ sei $U_x \subseteq M$ eine Umgebung von x , sodass $\delta(y) > \frac{1}{2} \delta(x)$ und $\|f(y) - f(x)\| < \frac{1}{2} \delta(x)$ für alle $y \in U_x$. Weil M zweitabzählbar ist, ist M separabel (Einführung, I.1), also gibt es abzählbar viele Punkte $x_1, x_2, \dots \in M$, sd. $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots$ ganz M überdecken. Wähle eine zugehörige glatte Zerlegung der 1 $\{\varphi_i: M \rightarrow [0,1]\}$ (d.h. für jedes $x \in M$ gilt $\varphi_i(x) = 0$ für fast alle i , $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) = 1$, $\text{supp } \varphi_i \subseteq U_{x_i}$). Definiere $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\bar{f}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \cdot f(x_i)$.

Dann ist $\bar{f}$ glatt und

$$\begin{aligned} \|f(x) - \bar{f}(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \cdot f(x) - \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \cdot f(x_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \|f(x) - f(x_i)\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \frac{1}{2} \delta(x_i) < \delta(x). \quad \square \end{aligned}$$

Prop. III.4.8 Sei $f: M \rightarrow S^n$ stetig, M glatt. Dann gibt es $\tilde{f}: M \rightarrow S^n$ glatt mit $f \approx \tilde{f}$.

Bew. Nach obiger Prop. gibt es für $f: M \rightarrow S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine glatte Näherung $\bar{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\|f(x) - \bar{f}(x)\| < 1$ für alle $x \in M$. Sei $r: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$ die radiale Retraktion. Dann ist $r \circ \bar{f} =: \tilde{f} \approx_h f$ mit $h(x, t) = r(t \cdot f(x) + (1-t) \cdot \bar{f}(x))$. $\square$

Bemerkung: Die Prop. gilt allgemeiner für $f: M \rightarrow N$ mit N glatt (Whitney-Einbettungssatz $N \subseteq \mathbb{R}^k$, Existenz von Tubumgebungen.)

Erinnerung (Sem. Diff. top.) Sei $f: M \rightarrow N$ glatt, $y \in N$ regulär (d.h. für alle $x \in M$ mit $f(x) = y$ gilt $df_x: T_x M \xrightarrow{\cong} T_y N$). Sei M kompakt, N zögl. und seien M und N orientiert (d.h. wir haben lokal verträgliche Orientierungen in allen Tangentialräumen von M und N gewählt.) Dann ist

$$\deg^{\text{diff}}(f) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn } df_x \in \mathbb{Z}$$

mit $\text{sgn } df_x \in \{\pm 1\}$ (+/-, falls df_x or. erhaltend/-umkehrend)

• unabhängig von der Wahl von y und

• ist f glatt isotop zu g , folgt $\deg^{\text{diff}}(f) = \deg^{\text{diff}}(g)$.

Satz III.4.9 Es trage S^n die Standardorientierung ($S^n = \partial D^{n+1}$) und $f: S^n \rightarrow S^n$ sei glatt. Dann gilt $\deg^{\text{diff}}(f) = \deg(f)$.

Lemma III.4.10 Sei $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Dann induziert A wegen $S^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ eine Abb. $f_A: S^n \rightarrow S^n$ vom Grad $\text{sgn } \det A \in \{\pm 1\}$.

Bew. Nach dem Gaußalgorithmus ist A Produkt von Elementarmatrizen. Für $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ ist $f_A = f_B$ mit

$B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \pm 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$, wende Prop. III.4.3 an. Ebenso auf die

Spiegelung $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$. Für $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ gilt $f_A \cong \text{id}_{S^n}$. $\square$

Lemma III.4.11 Sei $f: S^n \rightarrow S^n$, sodass es $x_0 \in S^n$ mit $f^{-1}(x_0) = \{x_0\}$ gibt, sodass es eine offene Umgebung $U \subseteq S^n$ von x_0 gibt, auf der f glatt ist und sodass df_{x_0} invertierbar ist. Dann gilt $\deg f = \operatorname{sgn} \det df_{x_0}$.

Bew. Identifiziere $S^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ durch stereografische Projektion . Dann gilt für $A \in GL_n(\mathbb{R})$, dass

$\operatorname{Jacobi}_0(s \circ f_A \circ s^{-1}) = A$. Setzen wir $A = (\operatorname{Jacobi}_0(s \circ f s^{-1}))^{-1}$, folgt $\operatorname{Jac}_0(s \circ f \circ f_A \circ s^{-1}) = \operatorname{Jac}_0(s \circ f \circ s^{-1} \circ s \circ f_A \circ s^{-1}) = \operatorname{Jac}_0(s \circ f \circ s^{-1}) \cdot \operatorname{Jac}_0(s \circ f_A \circ s^{-1}) = A^{-1} \cdot A = I_n$, d.h.

$d(f \circ f_A)_{x_0} = \operatorname{id}_{T_{x_0} S^n}$. Wegen $f = (f \circ f_A) \circ f_{A^{-1}}$ und $\deg f_{A^{-1}} \stackrel{\text{Lem.}}{=} \operatorname{sgn} \det A^{-1} = \operatorname{sgn} \det df_{x_0}$, bleibt zu zeigen $\deg f = 1$, falls $df_{x_0} = \operatorname{id}$. Zeigen sogar $f \approx \operatorname{id}_{S^n}$. Taylor: $f(x) = x + g(x)$ in Karte $S = (x_1, \dots, x_n)$ um x_0 und $\|g(x)\| < \frac{1}{2} \|f(x)\|$ für $0 < \|x\| \leq 2\varepsilon$.

Definiere $h: S^n \times I \rightarrow S^n$ durch

$$h(x, t) = \begin{cases} f(x) & 2\varepsilon \leq \|x\| \\ f(x) - t(2 - \frac{\|x\|}{\varepsilon})g(x) & \varepsilon \leq \|x\| \leq 2\varepsilon \\ f(x) - t \cdot g(x) & \|x\| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Setze $f_2(x) := h(x, 1)$. Wegen $\|g(x)\| < \frac{1}{2} \|f(x)\|$ für $\|x\| \leq 2\varepsilon$ gilt noch immer $f_2^{-1}(x_0) = \{x_0\}$. Wähle Schreibumgebung von x_0 , sodass für die komplementäre Scheibe D gilt $f_2(D) \subseteq D$ und $f_2|_{\partial D} = \operatorname{id}$. Dann gilt $f_2|_D \stackrel{h}{\approx} \operatorname{id}_D$ mit $h'(x, t) = tx + (2-t)f_2(x)$. Somit insgesamt $f_2 \approx \operatorname{id}_{S^n}$. $\square$

Bew. (III.4.9) Sei $y \in S^n$ regulärer Wert, $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$,
 $\dot{D}^n \cong D_i \ni x_i$ Scheibenumgebungen, s.d. $f|_{D_i}$ ein Diffeo.
 auf das Bild $D \subseteq S^n$. Erhalten

$$\begin{array}{ccc}
 S^n & \xrightarrow{f} & S^n \\
 \downarrow & & \downarrow \cong \\
 S^n / S^n \setminus \bigcup_{i=1}^k D_i & \rightarrow & S^n / S^n \setminus D \\
 \text{Nütze Orientierung} \rightarrow \cong \downarrow & & \downarrow \cong \leftarrow \text{Nütze Orientierung} \\
 \bigvee_{i=1}^k S^n & \xrightarrow{\bigvee f|_{D_i}} & S^n,
 \end{array}$$

also folgt wie im Beweis von Prop. III.4.6

$$\begin{aligned}
 \deg f &= \sum_{i=1}^k \deg(\overline{f|_{D_i}}) \stackrel{\text{letzte}}{\stackrel{\text{Zunahme}}{=}} \sum_{i=1}^k \text{sgn} \det(d\overline{f|_{D_i}} x_i) = \\
 &= \sum_{i=1}^k \text{sgn} df_{x_i} = \deg^{\text{diff}}(f). \quad \square
 \end{aligned}$$

Erinnerung (Sem. Diff. top., [Miknor, "Topology from the Differentiable Viewpoint", p. 51]):

Satz III.4.12 (Hopf) Sei M^n eine zylindrische, orientierte, randlose glatte Mannigfaltigkeit, $f, g: M^n \rightarrow S^n$ glatt. Dann sind f und g genau dann glatt homotop, wenn $\deg^{\text{diff}} f = \deg^{\text{diff}} g$.

Kor. III.4.13 Die Abb. $\deg: [S^n, S^n] \rightarrow \mathbb{Z}$ ist eine Bijektion.

Bew. Noch z.z.: Falls $f, g: S^n \rightarrow S^n$, $\deg f = \deg g$, dann $f \simeq g$.

Haben $f \simeq \tilde{f}$, $g \simeq \tilde{g}$ mit $\tilde{f}, \tilde{g}: S^n \rightarrow S^n$ glatt und

$$\deg^{\text{diff}} \tilde{f} = \deg \tilde{f} = \deg f = \deg g = \deg \tilde{g} = \deg^{\text{diff}} \tilde{g}.$$

Mit dem Hopf-Satz folgt $f \simeq \tilde{f} \simeq \tilde{g} \simeq g$. □

Satz III.4.14 Sei $n \geq 1$. Dann ist $\pi_k(S^n, \cdot) = 1$ für $k < n$ und $\deg: \pi_n(S^n, \cdot) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$ ist ein Iso. von Gruppen.

Bew. Für $k < n$ ist $S^k \rightarrow S^n$ homotop zu einer glatten und daher nicht surjektiven Abb. (Durch geeignete Wahl der verwendeten Zerlegung der 1 ist die Homotopie basispunkterhaltend.) Daher $\pi_k(S^n, \cdot) = 1$.

Weil für $[f], [g] \in \pi_n(S^n, \cdot)$

$$[f] \cdot [g] = [fg: S^n \rightarrow S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} S^n], \text{ folgt}$$

$$\text{wieder } \deg([f] \cdot [g]) = \deg fg = \deg f + \deg g = \deg [f] + \deg [g], \text{ d.h. } \deg \text{ ist ein Homomorphismus.}$$

Weil $\deg[id_{S^n}] = 1$, ist dieser surjektiv. Ist

$[f] \in \text{Ker } \deg$, folgt aus dem Korollar, dass f nullhomotop ist. Weil $\pi_2(S^n, \cdot) = 1$ und $(S^n, \cdot)$ wohlpunktisiert, ist f auch punktiert nullhomotop. $\square$

Bew. (von Satz III.4.2) Sei $f: S^n \rightarrow S^n$. Dann

gilt $f \simeq S^{n-2}(f_2)$ mit $k = \deg f$ lt. Korollar. Daher

$$\tilde{H}_n(f) = \tilde{H}_n(S^{n-2}(f_2)) = \gamma^{-2} \circ \tilde{H}_2(f_2) \circ \gamma \stackrel{\text{III.4.6}}{=} k \cdot \text{id}_{\tilde{H}_n(S^n)} \text{ mit dem } (n-1)\text{-fachen nat. Eichhörnchenisom. } \gamma: \tilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_2(S^2). \quad \square$$

III.5 Anwendungen

Ziel: Wir präsentieren ein paar (teilweise überraschende) Anwendungen der Homologie.

$$\text{Setze } H_*(-) = H_*^{\text{sing}}(\cdot; \mathbb{Z}/2).$$

Der Fundamentalsatz der Algebra

Satz III.5.1 Sei $p \in \mathbb{C}[z]$ mit $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Dann ist p konstant.

Bew. Sei $f_t: S^1 \rightarrow S^1$, $f_t(z) = \frac{p(tz)}{|p(tz)|}$. Weil

$h(s, z) = \frac{p((1-s)tz)}{|p((1-s)tz)|}$ eine Nullhomotopie ist, gilt

$\deg f_t = 0$. Für $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot z^k$, $a_n \neq 0$, sei $r_0 > 0$,
s.d. $|a_n z^n| > |\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k|$ für $|z| = r_0$. Setze

$p_s(z) = a_n z^n + s \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$. Dann ist $g(s, z) = \frac{p_s(r_0 z)}{|p_s(r_0 z)|}$
eine Homotopie $\frac{a_n}{|a_n|} z^n \simeq g_0 \simeq g_2 \simeq f_{r_0}$. Es folgt
 $n = \deg g_0 = \deg g_2 = \deg f_{r_0} = 0$. $\square$

Invarianz der Dimension

Satz III.5.2 $\mathbb{R}^n \cong_f \mathbb{R}^m \Rightarrow n = m$.

Bew. $S^{n-2} = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\} \simeq S^{m-2}$, also

$\tilde{H}_{n-2}(S^{n-2}) \cong \tilde{H}_{n-2}(S^{m-2})$. Mit kor. III.1.10 folgt

$n-2 = m-2$. $\square$

Keine Retraktionen auf den Rand

Satz III.5.3 Die Scheibe D^n retrahiert nicht auf ihren Rand.

Bew. Falls doch, gibt es $r: D^n \rightarrow S^{n-2}$, s.d.

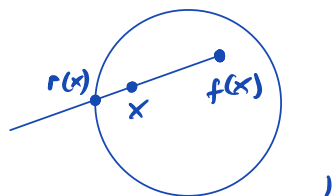
$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} \hookrightarrow & D^n & \searrow r \\ S^{n-1} & \xrightarrow{\text{id}} & S^{n-1} \end{array} & \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_{n-1} & \begin{array}{ccc} \nearrow 0 & & \searrow \\ \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z}/2 \end{array} \end{array} \quad \text{Widerspruch. } \square$$

Bemerkung: Allgemeiner eine komp. Mfl. retrahiert nicht auf ihren Rand (Top. II)

Der Brouwersche Fixpunktsetz

Satz III.5.4 Jede Abb. $f: D^n \rightarrow D^n$ hat einen Fixpunkt.

Bew. klar für $n=0$. Für $n \geq 1$, erhalte $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$:



mit $r|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$. Widerspruch zum letzten Satz. $\square$

Bemerkung: Aus dem Satz folgt die Existenz von „Nash-Gleichgewichten“ in der Spieltheorie.

Der Satz von Borsuk-Ulam

Satz III.5.5 (Borsuk-Ulam)

Für jedes $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt es $x \in S^n$ mit $f(x) = -x$.

Daher: • Auf jedem Großkreis der Erde gibt es stets gegenüberliegende Punkte mit gleicher Temperatur.

• Auf der Erde gibt es stets gegenüberliegende Punkte mit gleicher Temperatur und gleichem Luftdruck.

Satz III.5.6 (Antipodensatz) Sei $g: S^n \rightarrow S^m$, sd.

$g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in S^n$. Dann gilt $n \leq m$.

Satz III.5.6 $\Rightarrow$ Satz III.5.5: Angenommen, es gäbe $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

mit $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in S^n$. Dann gilt für $g: S^n \rightarrow S^{n-1}$,

$g(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$, dann $g(-x) = -g(x)$. $\square$

Bew. (von Satz III.5.6): $\mathbb{Z}/2 = \langle t \mid t^2 \rangle \curvearrowright S^1$, $t \cdot x = -x$.

$S^1/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{RP}^1$, $p: S^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ universelle Überlagerung.

$$\rightarrow \begin{array}{ccc} \Delta_p & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{RP}^1 \\ \nearrow \bar{\sigma}_+ & & \downarrow p \\ & S^1 & \end{array}, \quad t \cdot \bar{\sigma}_\pm = \bar{\sigma}_\mp. \quad \text{Setze } C_* := C_*^{\text{ind}}(\cdot; \mathbb{Z}_2)$$

$$\rightarrow \tau_*: C_*(\mathbb{RP}^1) \rightarrow C_*(S^1), \quad \tau_*(\sigma) = \bar{\sigma}_+ + \bar{\sigma}_-,$$

Kettenabb. ✓ (Transfer)

$$\rightarrow 0 \rightarrow C_*(\mathbb{RP}^1) \xrightarrow{\tau_*} C_*(S^1) \xrightarrow{P_*} C_*(\mathbb{RP}^1) \rightarrow 0 \quad (\text{S.E.S.})$$

Sei $g: S^n \rightarrow S^n$ mit $g(-x) = -g(x)$. Erhalte $\bar{g}: \mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$

$$\rightarrow \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C_*(\mathbb{RP}^n) & \xrightarrow{\tau_*} & C_*(S^n) & \xrightarrow{P_*} & C_*(\mathbb{RP}^n) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{g}_* & \circ (*) & \downarrow g_* & \circ & \downarrow \bar{g}_* \end{array}$$

$$0 \rightarrow C_*(\mathbb{RP}^n) \xrightarrow{\tau_*} C_*(S^n) \xrightarrow{P_*} C_*(\mathbb{RP}^n) \rightarrow 0$$

$$(*) : \text{Betrachte} \quad \begin{array}{ccccc} \Delta^n & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{RP}^n & \xleftarrow{p_n} & S^n \xleftarrow{\bar{\sigma}_\pm} \Delta^n \\ & & \downarrow \bar{g} & \circ & \downarrow g \\ & & \mathbb{RP}^n & \xleftarrow{p_n} & S^n \end{array},$$

$$p_n \circ (g \circ \bar{\sigma}_\pm) = (p_n \circ g) \circ \bar{\sigma}_\pm = (\bar{g} \circ p_n) \circ \bar{\sigma}_\pm = \bar{g} \circ (p_n \circ \bar{\sigma}_\pm) = \bar{g} \circ \sigma.$$

Vg. der Eindeutigkeit der Hochhebung folgt die Kommutativität.

Untere LES

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}(\mathbb{RP}^n) & \xrightarrow{0} & H_n(\mathbb{RP}^n) & \xrightarrow{H_n(\tau_*)} & H_n(S^n) & \xrightarrow{H_n(p)} & H_n(\mathbb{RP}^n) \rightarrow \\ \parallel (\text{III.2.3}) & & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow \\ & & H_{n-1}(\mathbb{RP}^n) & \rightarrow & \dots 0 & & \dots \\ & & \dots & & \dots 0 & \rightarrow & H_1(\mathbb{RP}^n) \rightarrow \\ & & \rightarrow & & H_0(\mathbb{RP}^n) & \xrightarrow{0} & H_0(S^0) \xrightarrow{=} & H_0(\mathbb{RP}^n) \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 H_n(\tau_*) \circ H_n(p) &= H_n(\tau_* \circ p_*) = H_n(\text{id}_{C_*(S^n)} + C_*(S^n \xrightarrow{(-1)} S^n)) \\
 &= \text{id}_{H_*(S^n)} + \underbrace{(-1)^{n+1}}_{\equiv 1 \pmod{2}} \cdot \text{id}_{H_*(S^n)} = 2 \cdot \text{id} = 0.
 \end{aligned}$$

Weil $H_n(\tau_*)$ injektiv, folgt $H_n(p) = 0$. Daher ist $H_n(\tau_*)$ ein Iso. Außerdem $H_k(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{\cong} H_{k-1}(\mathbb{R}P^n)$ für $1 \leq k \leq n$.

Natürlichkeit in Satz II.2.2 gibt für $n \geq m$ und $1 \leq i \leq m$:

$$\begin{array}{ccc}
 H_i(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\cong} & H_{i-1}(\mathbb{R}P^n) \\
 H_i(\bar{\gamma}) \downarrow & \gamma & \downarrow H_{i-1}(\bar{\gamma}) \\
 H_i(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\cong} & H_{i-1}(\mathbb{R}P^n)
 \end{array}$$

Weil $H_0(\bar{\gamma})$ ein Iso. ist, ist induktiv $H_i(\bar{\gamma})$ ein Iso für $0 \leq i \leq m$. Somit folgt

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{H_n(\tau_*)} & H_n(S^n) \\
 H_n(\bar{\gamma}) \downarrow \cong & & \downarrow H_n(\gamma) \\
 H_n(\mathbb{R}P^n) & \xrightarrow{\cong} & H_n(S^n),
 \end{array}$$

aber $H_n(S^n) = 0$ für $n > m > 0$, während $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}/2$ für $n > 0$, Widerspruch. Für $m = 0$ ist der Satz klar. $\square$

Der Schinkenschnittsatz

Satz III.5.7 Seien $A_1, \dots, A_m \subseteq \mathbb{R}^n$ Darsalmengen von endlichem Lebesguemaß $\lambda(A_i) < \infty$ für $i = 1, \dots, m$.

Dann gibt es eine affine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$, die jedes A_i in zwei Teilmengen gleichen Maßes zerschneidet.

$$\cdot H_x^+ = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, y \rangle \geq 0\} \cap \mathbb{R}^n \times \{1\}$$

• $H_x^- = \underline{\hspace{2cm}} \parallel \underline{\hspace{2cm}} \leq \underline{\hspace{2cm}} \parallel \underline{\hspace{2cm}}$

$$\bullet H_x = H_x^+ \cap H_x^-$$

Sei also (x_j) in S^m mit $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x \in S^m$. Die char. Filter

$\chi_{\text{AinH}_x^+}$ konvergieren außerhalb AinH_x gegen $\chi_{\text{AinH}_x^+}$.

Also $\lim_{j \rightarrow \infty} \chi_{A_i \cap H_{x_j}^+} = \chi_{A_i \cap H_x^+}$ $\mathbb{1}$ -f. ü. weil $\chi_{A_i \cap H_{x_j}^+} \leq \chi_{A_i}$
und $\int \chi_{A_i} d\mathbb{1} = \mathbb{1}(A_i) < \infty$, folgt aus dominierter Konvergenz
 $\lim_{j \rightarrow \infty} f_i(x_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \chi_{A_i \cap H_{x_j}^+} d\mathbb{1} = \int \chi_{A_i \cap H_x^+} d\mathbb{1} = \mathbb{1}(A_i \cap H_x^+) = f_i(x)$. $\square$

Borsuk-Ulam II

Satz III.5.8 Sei $\{A_1, \dots, A_{r+1}\}$ eine abgeschlossene Überdeckung von S^n . Dann gibt es $x \in S^n$ und $i \in \{1, \dots, r+1\}$, sodass $\{x\} \subseteq A_i$.

Bew. Für $y \in S^n$ sei $d_i(y) = d(y, A_i) = \inf_{a \in A_i} \|y - a\|$.

Setze $f = (d_1, \dots, d_n)$. Laut Borsuk-Ulam ^{u.a.} gibt

es $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$. Gilt $d_i(x) = 0$ für ein i ,
ist $\pm x \in A_i$, weil A_i abgeschlossen ist. Ist jedoch
 $d_i(x) > 0$ für $i = 1, \dots, n$, folgt $\pm x \notin A_1 \cup \dots \cup A_n$,
also $\pm x \in A_{n+1}$. $\square$

Bemerkung: Die Anzahl $n+1$ ist bestmöglich, betrachte
die radiale Projektion eines eingepassten $\partial \Delta^{n+1} \subseteq S^n$.

IV Zellkomplexe und zelluläre Homologie

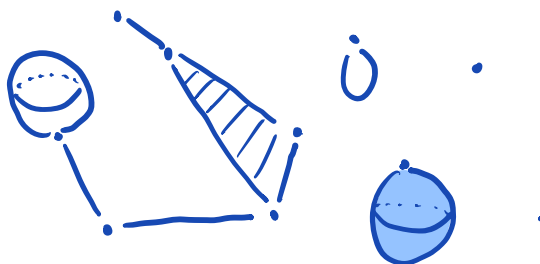
Erinnerung:
$$\begin{array}{ccc} S^{n-2} & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \iota & \downarrow \Gamma & \downarrow j \\ D^n & \xrightarrow{\bar{f}} & Z \end{array} \quad (\text{Zellanheftung})$$

Mayer-Vietoris-Folge:

$$\rightarrow \tilde{H}_2(S^{n-2}) \xrightarrow{\tilde{H}_2(f)} \tilde{H}_2(Y) \xrightarrow{\tilde{H}_2(j)} \tilde{H}_2(Z) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{2-2}(S^{n-2}) \xrightarrow{\tilde{H}_{2-2}(f)} \tilde{H}_{2-1}(Y).$$

Angenommen $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$ mit X^0 diskret und

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I_n} S^{n-1} & \xrightarrow{\# f_i} & X^{n-1} \\ \downarrow \Gamma & & \downarrow \\ \coprod_{i \in I_n} D^n & \xrightarrow{\# \bar{f}_i} & X^n \end{array}$$



Für $i \in I_n$, $j \in I_{n-1}$, betrachte

$$f_{ij}^n : S^{n-1} \xrightarrow{f_i} X^{n-1} \xrightarrow{\text{Kollabieren}} X^{n-1} / (X^{n-1} \setminus (\text{Bild } \bar{f}_j)) \xrightarrow{\cong} S^{n-1}$$

Die Abb. $(f_{ij}^n)_j$ formen eine Zerlegung der Anheftungsabb. f_i . Mit der M.V.S. erscheint es plausibel, dass für eine gewöhnliche Homologietheorie H_* die Homologie $H_*(X)$ schon durch die Morphismen $\tilde{H}_*(f_{ij}^n)$ bestimmt ist.

Daher:

- Kombinatorische Berechnung von $H_*(X)$ durch die ganzen Zahlen $\deg f_{ij}^n$ erscheint möglich
- $H_*(X)$ unabhängig von H_* ! (Also allein durch die Eilenberg-Steenrod-Axiome bestimmt.)

IV.1 Zellkomplexe

Ziel. Konstruiere und studiere die Kategorie der Zellkomplexe.

Def. IV.1.1 Ein **Zellkomplex** oder **CW-Komplex** ist ein top. Raum X mit einer Filtrierung

$$\emptyset = X^{-1} \subseteq X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq X,$$

so dass es für jedes $n \geq 0$ eine Familie von Abb. $Q_i^n: D^n \rightarrow X^n$ gibt mit $i \in I_n$ und $Q_i^n|_{S^{n-1}} = q_i^n: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$, d.h.

1.)

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I_{n-1}} S^{n-1} & \xrightarrow{\coprod q_i^{n-1}} & X^{n-1} \\ \downarrow & \Gamma & \downarrow j_n \\ \coprod_{i \in I_n} D^n & \xrightarrow{\coprod Q_i^n} & X^n \end{array}$$

2.) $X = \operatorname{colim}_n X^n$

Beobachtungen / Terminologie:

• $n=0$: $\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{\quad} & \emptyset \\ \downarrow & \Gamma & \downarrow \\ \coprod_{i \in I_0} \bullet & \xrightarrow{\cong} & X^0 \end{array}$, d.h. X^0 ist diskret.

- Das **n -Gerüst** X^n entsteht aus X^{n-1} durch Anheftung von n -Zellen. Wegen Satz III.1.7 ist $j_n: X^{n-1} \rightarrow X^n$ abg. und $X^n \setminus X^{n-1} \cong \coprod_{i \in I_n} \mathring{D}^n$. Die Wegzshgskomponenten e_i^n von $X^n \setminus X^{n-1}$ heißen **(offene) n -Zellen**, Q_i^n heißt eine **charakteristische Abbildung** für die i -te n -Zelle.

- Top $\rightarrow$ Set ist linksadjungiert, also losterig, d.h. aus (2) folgt $X = \bigcup_{n=2-\infty} X^n$ als Kerze. Aus (2) folgt zudem, dass X die finale Topologie bzgl. $(X^n)_n$ trägt, d.h.

$A \subseteq X$ abg. $\Leftrightarrow A \cap X^n \subseteq X^n$ abg. für alle n .

Diese Topologie ist nämlich maximal, sodass X überhaupt ein Korrel

$$\begin{array}{ccc} X^{n-1} & \xrightarrow{j_n} & X^n \\ i_{n-1} \searrow & & \swarrow i_n \\ & X & \end{array}$$

ist und minimal, sodass dieses universell ist

$$\begin{array}{ccc} X^{n-1} & \xrightarrow{j_n} & X^n \\ & \searrow & \swarrow \\ & X' & \\ & \downarrow \text{id} & \\ & X & \end{array}$$

- Wichtig: Die Filtrierung (X^n) ist Teil der Struktur eines Zellkomplexes, die char. Abb. Q_i^n (äquivalent die Pushouts $\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^{n+1} & \xrightarrow{f} & X^{n+1} \\ \downarrow \text{r.f.} & & \downarrow \\ \mathbb{D}^n & \xrightarrow{f} & X^n \end{array}$) nicht, nur ihre Existenz wird gefordert.

Satz IV.1.2 Zellkomplexe sind T_4 (normal und Hausd.)

Bew. Übung.

□

Satz IV.1.3 Sei X ein Zellkomplex und $C \subseteq X$ eine Teilmenge.

(i) C abg. $\Leftrightarrow C \cap \overline{e_i^n}$ kompakt für alle $i \in I_n, n \geq 0$.

(ii) C kompakt $\Leftrightarrow (C$ abg. und $C \cap \overline{e_i^n} \neq \emptyset$ nur für endlich viele i und n .)

Bew. (i). " $\Rightarrow$ " $C \cap \overline{e_i^n} \subseteq \overline{e_i^n}$ abg., also kompakt,

weil $\overline{e_i^n} = Q_i^n(D^n)$ kompakt. " $\Leftarrow$ ": Folgt induktiv, weil

$(\bigcup_i Q_i^n) \xrightarrow{j_n} (\bigcup_i D^n) \xrightarrow{\text{identifiziert}} X^n$ identifiziert und $C \cap Q_i^n(D^n) = C \cap \overline{e_i^n}$ kompakt in Hausdorffr., also abg.

(ii): " $\Leftarrow$ ": C abg., $C \subseteq C \cap \overline{e_{i_1}^{n_1}} \cup \dots \cup C \cap \overline{e_{i_k}^{n_k}}$

kompakt, also C kompakt. " $\Rightarrow$ ": Nachlesen. $\square$

Bemerkung: CW-Komplex: "C" für "closure finite": jede abg. Zelle $\overline{e_i^n}$ trifft nur endlich viele andere Zellen.

"W" für "weak topology": schwach in dem Sinne, dass man schon an den Schnitten mit der GröÙten erkennt, ob eine Menge offen/abgeschlossen ist.

Bsp. IV.1.4 $X = S^n$, $X^{-1} = \emptyset$, $X^0 = X^1 = \dots = X^{n-1} = \cdot$, $X^n = S^n$,

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & X^{l-1} \\ \downarrow \Gamma & & \downarrow \\ \emptyset & \longrightarrow & X^l \end{array}, \quad l=1, \dots, n-1, \quad \begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & X^{n-1} = \cdot \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & X^n \end{array}$$



Bsp. IV.1.5 $X = \Sigma_g$, $X^{-1} = \emptyset$, $X^0 = \cdot$, $X^1 = \bigvee_{i=1}^{2g} S^1$, $X^2 = \Sigma_g$.

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & X^1 \\ \downarrow \Gamma & & \downarrow \\ D^2 & \longrightarrow & X^2 \end{array}, \quad f: S^1 \rightarrow \bigvee_{i=1}^{2g} S^1, \quad \text{Diagram of } \Sigma_g \text{ with generators } a_i, b_i \mapsto \prod_{i=1}^g [a_i, b_i]$$

Bsp. IV.2.6 $X = \mathbb{R}P^n$, $X^n = \{[x_0 : \dots : x_n : 0 : \dots : 0]\} \cong \mathbb{R}P^n$,

eine Zelle in jedem Grad

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{q^n} & X^{n-1} \cong \mathbb{R}P^{n-1} \\ \downarrow \Gamma & & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{Q^n} & X^n \cong \mathbb{R}P^n, \end{array}$$

$$q^n(x_1, \dots, x_n) = [x_1 : \dots : x_n] \text{ (universelle Überlagerung)}$$

$$Q^n(x_1, \dots, x_n) = [x_1 : \dots : x_n : \sqrt{1 - \|(x_1, \dots, x_n)\|^2}]$$

Bsp. IV.2.7 $X = \mathbb{C}P^n$ hat eine $2n$ -Zelle in jedem

geraden Grad, $X^{2n} = X^{2n+1} = \{[z_1 : \dots : z_n : 0 : \dots : 0]\} \cong \mathbb{C}P^n$,

$$\begin{array}{ccc} S^{2n-1} & \xrightarrow{q^{2n}} & X^{2n-1} \cong \mathbb{C}P^{n-1} \\ \downarrow \Gamma & & \downarrow \\ D^{2n} & \xrightarrow{Q^{2n}} & X^{2n} \cong \mathbb{C}P^n, \end{array}$$

$$q^{2n}(z_1, \dots, z_n) = [z_1 : \dots : z_n]$$

$$Q^{2n}(z_1, \dots, z_n) = [z_1 : \dots : z_n : \sqrt{1 - \|(z_1, \dots, z_n)\|^2}]$$

Bemerkung $S^3 \xrightarrow{\Gamma^4} \mathbb{C}P^1 \cong S^2$ ist das Hopf-Bündel.

Def. IV.2.8 Sei A ein Hausdorffraum. Wir definieren einen **relativen Zell- oder CW-Komplex** wie zuvor mit $X^{-2} = A$.

Def. IV.2.9 Eine Abb. $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ relativer Zellkomplexe heißt **zellulär** falls $f(X^n) \subseteq Y^n$ für $n \geq -1$.

$\leadsto$ Kategorien CW und rel CW.

Def. IV.2.10 Sei X ein Zellkomplex. Ein Teilraum $A \subseteq X$ heißt **Teilkomplex**, falls A abgeschlossene Vereinigung offener Zellen ist.

In diesem Fall ist A selbst ein Zellkomplex mit $A^n := A \cap X^n$.

$\leadsto$ Kategorie $CW^{(2)}$ der **CW-Paare**.

Haben einen Funktor $CW^{(2)}$ $\rightarrow$ rel CW, der die Filtrierung $(X^n)_{n=-\infty}^{\infty}$ in die Filtrierung $(X^n \cup A)_{n=-1}^{\infty}$ überführt.

Def. IV.2.11 Sei (X, A) ein rel. CW-Komplex. Dann definieren wir $\dim(X, A) = n$, falls $X = X^n$ und $X \neq X^{n-1}$. (X, A) habe **endlichen Typ**, falls es nur endlich viele Zellen in jedem Grad gibt. (X, A) heiße **endlich**, falls es nur endlich viele Zellen insgesamt gibt.

Stabilität der Kategorie CW :

• Sind X, Y Zellkomplexe, so auch $X \amalg Y$ (klar.)

Satz IV.2.12 Sei X oder Y lokal kompakt. Dann ist $X \times Y$ ein Zellkomplex mit Filtrierung $(X \times Y)^n = \bigcup_{p+q=n} X^p \times Y^q$.

Bew. n -Zellen in $X \times Y$ sind Produkte $e_X^p \times e_Y^q$, nutze $D^n \cong D^p \times D^q$. Haben Identifizierungen

$$f: \coprod_{n \geq 0} \coprod_{e \in \mathbb{Z}_+^X} D^n \longrightarrow X, \quad g: \coprod_{n \geq 0} \coprod_{e \in \mathbb{Z}_+^Y} D^n \longrightarrow Y$$

z.z.: $f \times g$ ist eine Identifizierung. O.B.d.A. ist X lokal kompakt. Dann gilt

$$f \times g = (f \times \text{id}_{\coprod_{n,i} D^n}) \circ (\text{id}_X \times g)$$

und beide Abb. sind Identifizierungen nach Blatt 4/5, Aufgabe 2, Einf. in die Top. $\square$

- Ist (X, A) ein CW-Paar, so ist X/A ein Zellkomplex.
- Daher auch CX , ∂X , ΣX
- Ist $p: Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und X ein Zellkomplex, so auch Y .

Satz IV.1.23 Ein relativer CW-Komplex (X, A) ist eine abgeschlossene Kofaserung.

Bew. Nach Lemma III.1.7 ist jedes $j: X^n \rightarrow X$ eine abg. Kofaserung. Also ist (X^n, A) eine abgeschlossene Kofaserung und (X, A) ist abgeschlossen. Noch z.z.: (X, A) ist eine Kofaserung.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_0^A} & A \times I \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{i_0^X} & X \times I \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow H \\ \downarrow H' \\ \xrightarrow{f} Y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X^{n-1} & \rightarrow & X^{n-1} \times I \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^n & \rightarrow & X^n \times I \\ \downarrow & \text{f \circ i_n} & \downarrow \\ X^{n+1} & \rightarrow & X^{n+1} \times I \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \\ \downarrow \\ \xrightarrow{f \circ i_{n+1}} Y \end{array}$$

Wir erhalten $H': \operatorname{colim}_n X^n \times I \rightarrow Y$.

Weil I kompakt ist, erhält $() \times I$ nicht nur (wie wir wissen) Pushouts, sondern auch allgemeine Kolimites, d.h. $\operatorname{colim}_n X^n \times I = X \times I$. $\square$

Kor. IV.1.24 Zu einem rel. Zellkomplex (X, A) gibt

es für jede Homologietheorie H_* eine LES

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow \cdots \quad \square$$

Kor. IV.1.15 Sei $\emptyset \neq X$ ein Zellkomplex und $x_0 \in X^0$.

Dann ist (X, x_0) wohlpunktiert.

Satz IV.1.16 Sei X ein wegziehbarer Zellkomplex mit genau einer 0-Zelle $x_0 \in X$. Wähle char. Abb.en

$$(Q_i^n, q_i^n): (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$$

für $i \in I_n$ und $n = 1, 2$. Dann gilt

$$\pi_2(X, x_0) = \langle [Q_i^2] \mid i \in I_2 \mid [q_j^2], j \in I_2 \rangle.$$

Bew. Betrachte $\cdots \rightarrow \pi_2(X^{n-1}, x_0) \xrightarrow{\pi_2(i_n)} \pi_2(X^n, x_0) \rightarrow \cdots$
 $\searrow \quad \swarrow$
 $\pi_2(X, x_0)$

Beh.: $\operatorname{colim}_n \pi_2(X^n, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_2(X, x_0)$.

Surjektiv: Sei $[\gamma] \in \pi_2(X, x_0)$. Dann ist $\gamma(I)$

kompakt, also $\gamma(I) \subseteq X^n$ für n groß genug

nach Satz IV.1.3.(ii).

Injektiv: Sei $[\gamma] \in \pi_2(X^n, x_0)$ und $H: I \times I \rightarrow X$ eine Nullhomotopie von γ in X . Dann gilt auch $H(I \times I) \subseteq X^m$ für m groß genug, d.h. $[\gamma] = 1$ in $\pi_2(X^m, x_0)$.

Für $[\gamma] \in \pi_2(X^n, x_0)$ liegt $\gamma(I)$ in einem endlichen Teilkomplex von X^n , also folgt $\pi_2(X^{n-1}, x_0) \cong \pi_2(X^n, x_0)$ für $n \geq 3$ laut Satz II.5.2 (Einf. Top.). Somit $\pi_2(X, x_0) = \operatorname{colim}_n \pi_2(X^n, x_0) = \pi_2(X^2, x_0)$. Weil X^2 ein Präsentationskomplex ist, folgt die Beh.

Anheftungen von Zellkomplexen

Sei (X, A) ein CW-Paar, Y ein CW-Komplex und $f: A \rightarrow Y$ zellulär (die Anheftungsabbildung).

Dann definiert

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i & \tau & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{\bar{f}} & Z \end{array} \quad (*)$$

in Top einen Zellkomplex Z mit Filtrierung

$Z^n = \bar{f}(X^n) \cup j(Y^n)$ (die Anheftung von X an Y).

- $\{n\text{-Zellen in } Z\} = \{n\text{-Zellen in } Y\} \cup \{n\text{-Zellen in } X \setminus A\}$
- Char. Abb.en durch Komposition mit $\bar{f}$ und j .
- $\operatorname{colim}_n Z^n = \operatorname{colim}_n ((\bar{f} \amalg j)(X^n \amalg Y^n)) =$

$= (\bar{f} \sqcup j) (\operatorname{colim}_n (X^n \sqcup Y^n)) = (\bar{f} \sqcup j) (X \sqcup Y) = Z$,
 denn Identifizieren ist linksadjungiert, also
 stetig.

Wir nennen $(*)$ ein **zelluläres Pushout**. Wegen 1.42(ii)
 ist (Z, Y) wieder ein CW-Paar und $\bar{f}: X \rightarrow Z$ ist
 nach Konstruktion zellulär.

Satz IV.1.17 (Seifert-van Kampen: CW-Version)

Sei $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \bar{f} & & \downarrow j \\ X & \rightarrow & Z \end{array}$ ein zelluläres Pushout, A, X, Y wegziehbar
 und seien a_0, x_0, y_0, z_0 kompatible
 Basispunkte. Dann gilt $\begin{array}{ccc} \pi_2(A, a_0) & \rightarrow & \pi_2(Y, y_0) \\ \downarrow \bar{f} & & \downarrow j \\ \pi_2(X, x_0) & \rightarrow & \pi_2(Z, z_0) \end{array}$.

Bew. Nach Satz 6.14 ist (X, A) eine Kofaserung,
 also ist die Pushoutversion des Satzes anwendbar. $\square$

Satz IV.1.18 (M.V.S.: CW-Version)

Sei $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \bar{f} & & \downarrow j \\ X & \rightarrow & Z \end{array}$ zellulär, $B \subseteq A$, $B' \subseteq Y$, od. $f(B) \subseteq B'$.
 Dann heben wir eine nat. L.E.S.

$$\cdots \rightarrow H_n(A, B) \xrightarrow{(H_n(i), H_n(f))} H_n(X, B) \oplus H_n(Y, B') \xrightarrow{H_n(\bar{f}) - H_n(j)} H_n(Z, B') \rightarrow \cdots$$

Bew. IV.1.13 und unter III.3.3 $\square$

Ist $A = \emptyset$, setze $B = B' = \circ$ und erhalte

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{(\tilde{H}_n(i), \tilde{H}_n(f))} \tilde{H}_n(X) \oplus \tilde{H}_n(Y) \xrightarrow{\tilde{H}_n(\bar{f}) - \tilde{H}_n(j)} \tilde{H}_n(Z) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \cdots,$$

die **reduzierte M.V.S.** eines zellulären Pushouts.

IV. 2 Zelluläre Homologie und Eulercharakteristik

Ziel: Homologieberechnung von Zellkomplexen,
Definition und Bestimmung der Eulercharakteristik.

Sei (H_*, ∂_*) eine Homologietheorie mit Werten in $\mathbb{R}$ -Mod.

Def. IV.2.1 Sei (X, A) ein rel. Zellkpx. Der **zelluläre Kettenkomplex** von (X, A) bzgl. (H_*, ∂_*) ist

$$C_n^{cw}(X, A; H_*) := H_n(X^n, X^{n-1})$$

mit Differentialen $\partial_n^{cw}: C_n^{cw}(X, A; H_*) \rightarrow C_{n-1}^{cw}(X, A; H_*)$
gegeben durch

$$\partial_n: H_n(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$$

aus der Tripelfolge von (X^n, X^{n-1}, X^{n-2}) .

Wir haben das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & H_{n-1}(X^{n-1}) & & \\ & \nearrow & \downarrow & & \\ H_n(X^n, X^{n-1}) & \rightarrow & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \rightarrow & H_{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}), \\ & & \downarrow & \nearrow & \\ & & H_{n-2}(X^{n-2}) & & \end{array}$$

$$\text{also } \partial_{n-1}^{cw} \circ \partial_n^{cw} = 0.$$

Die **zelluläre Homologie** von (X, A) bzgl. (H_*, ∂_*) ist

$$H_*^{cw}(X, A) := H_*(C_*^{cw}(X, A; H_*))$$

$\uparrow$
Homologie des
Kettenkomplexes

$\uparrow$
Vorgegebene
Homologietheorie.

Satz IV.2.2 Sei (X, A) ein rel. Zellkpx. und (H_*, d_*) gewöhnlich. Falls (X, A) unendlich, sei (H_*, d_*) zudem additiv. Dann haben wir nat. Isom.

$$H_n(X, A) \xrightarrow{\cong} H_n^{CW}(X, A) \quad \text{für } n \geq 0.$$

Beweis: Wähle Pushouts

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I_n} S^{n-1} \xrightarrow{\coprod q_i} X^{n-1} \\ \downarrow \text{Kofaserung} \quad \uparrow \quad \downarrow j_n \\ \coprod_{i \in I_n} D^n \xrightarrow{\coprod Q_i} X^n \end{array}$$

$$\begin{aligned} \leadsto H_k(X^n, X^{n-1}) &\cong H_k\left(\coprod_{i \in I_n} D^n, \coprod_{i \in I_n} S^{n-1}\right) \xrightarrow{\text{Ser-Zerleg., Additivität}} \\ &\cong \bigoplus_{i \in I_n} H_k(D^n, S^{n-1}) \cong \bigoplus_{i \in I_n} H_{k-n}(\cdot) \end{aligned}$$

H_* gewöhnlich, also

$$H_k(X^n, X^{n-1}) \cong \begin{cases} \bigoplus_{i \in I_n} H_0(\cdot) & k=n \\ 0 & \text{für } k \neq n. \end{cases}$$

Betrachte die Tripelfolge zu (X^n, X^{n-1}, A) :

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^{n-1}, A) \xrightarrow{\cong} H_k(X^n, A) \rightarrow H_k(X^n, X^{n-1}) \rightarrow \cdots$$

falls $k \notin \{n, n-1\}$

$$\leadsto k > n \Rightarrow H_k(X^n, A) \cong H_k(X^{n-1}, A) \cong \cdots \cong H_k(A, A) \cong 0.$$

$$\leadsto k < n \Rightarrow H_k(X^n, A) \cong H_k(X^{n-1}, A) \cong H_k(X^{n-2}, A) \cong \cdots$$

$$\text{d.h. } H_k(X^n, A) \cong \operatorname{colim}_m H_k(X^m, A)$$

Beh.: $\operatorname{colim}_m H_2(X^m, A) \cong H_2(X, A)$.

- Klar, falls X endlich-dim.
- Falls nicht, nutze " $T(X^\circ) = \operatorname{hocolim}_m X^m$ "



$$A \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow X^2 \rightarrow X^3 \rightarrow \dots$$

"gefilterter Homotopie-
kolimes"

"Abbildungstapelung"

und $H_2(T(X^\circ), A) \cong \operatorname{colim}_m H_2(X^m, A)$ sowie $T(X^\circ) \simeq_A X$.

(vgl. für $f: A \rightarrow X$ gilt $H_2(\operatorname{hocolim}(A \xrightarrow{f} X)) = H_2(M_f)$

und $\operatorname{colim} H_2(A \xrightarrow{f} X) = \operatorname{colim}(H_2(A) \xrightarrow{H_2(f)} H_2(X)) = H_2(X)$

sowie $M_f \simeq X$.)

Es gilt also $H_2(X^n, A) \cong H_2(X, A)$ für $k < n$.

Betrachte nun exakt

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(X^{n+1}, A) = 0 & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & H_n(X^n, A) \rightarrow H_n(X^{n+1}, A) \rightarrow H_n(X^{n+1}, X^n) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & H_n(X^n, X^{n-1}) & & H_n(X^{n+1}, X^n) \\
 \nearrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial_n & & \nearrow \partial_n \\
 H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{cw}} & H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_n^{cw}} & H_{n-1}(X^n, X^{n-2}) \\
 & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_{n-1} \\
 & & H_{n-1}(X^n, A) & & H_{n-1}(X^{n+1}, A) \\
 & & \nearrow & & \nearrow \\
 & & H_{n-1}(X^{n+1}, A) = 0 & &
 \end{array}$$

Beh.: i_n induziert $\operatorname{colim} \partial_{n+1} \xrightarrow{\cong} H_n^{cw}(X, A) = \frac{\ker \partial_n^{cw}}{\operatorname{im} \partial_{n+1}^{cw}}$.

Bew.: Diagrammjagd.

Wir schließen $H_n^{cw}(X, A) \cong \operatorname{coker} \partial_{n+1} \cong H_n(X^{n+1}, A) \cong H_n(X, A)$
und dieser Iso. ist natürlich für zelluläre Abb. $\square$

Korollar IV.2.3 Sei H_* gewöhnlich und $H_0(\cdot)$ frei von
endlichem Rang über einem Hauptidealring R . Sei
das Raumpaar (X, A) hom. äquiv. zu einem endl. u.
rel. Zellkomplex. Dann ist $H_n(X, A)$ endlich präsentierte
 R -Modul für alle $n \geq 0$. $\square$

Eine nat. Randabb. $\partial_n^{cw}: H_n^{cw}(X, A) \rightarrow H_{n-1}^{cw}(A)$
erhält man aus folgendes Prop. mit Satz 4.4.

Prop. IV.2.4 Für ein CW-Paar (X, A) haben wir eine nat. SES
 $0 \rightarrow C_*^{cw}(A; H_*) \rightarrow C_*^{cw}(X; H_*) \rightarrow C_*^{cw}(X, A; H_*) \rightarrow 0$.

Bew. Klar, falls $A = \emptyset$. Andernfalls ist

$$\begin{array}{ccc} A^n/A^{n-1} & \xrightarrow{i_n} & X^n/X^{n-1} \\ \parallel & & \parallel \\ \bigvee_i S^n & \hookrightarrow & \bigvee_i S^n \end{array}$$

eine Kofaserung mit Retraction $r_n: X^n/X^{n-1} \rightarrow A^n/A^{n-1}$.

Wohl $X^n/X^{n-2}/A^n/A^{n-2} \cong X^n \cup A/X^{n-1} \cup A$ gibt III.16 SESen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \tilde{H}_n(A^n/A^{n-1}) & \rightarrow & \tilde{H}_n(X^n/X^{n-1}) & \rightarrow & \tilde{H}_n(X^n \cup A/X^{n-1} \cup A) & \rightarrow & 0 \\ \parallel \text{ III.1.4} & & \parallel & & \parallel & & \\ C_n^{cw}(A; H_*) & & C_n^{cw}(X; H_*) & & C_n^{cw}(X, A; H_*) & & \end{array}$$

Natürlichkeit folgt aus III.1.4 und III.1.6.

Achtung! Etablierter Notationsmissbrauch für ∂_n^{cw}
als $H_n^{cw}(X, A) \rightarrow H_{n-1}^{cw}(A)$ und $C_n^{cw}(X, A) \rightarrow C_{n-1}^{cw}(X, A)$.

Prop. IV.2.5 Annahmen wie in IV.2.2. Dann gilt

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A) \\ \parallel & & \parallel \\ H_n^{cw}(X, A) & \xrightarrow{\partial_n^{cw}} & H_{n-1}^{cw}(A) \end{array}.$$

Bew. Nutze $H_n^{cw}(X, A) \cong \text{coker}(\partial_{n+2})$ wie in IV.2.2
und die Natürlichkeit von ∂_n . $\square$

Zusammen haben wir also einen „nat. Iso. LESen“

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & H_n(A) & \rightarrow & H_n(X) & \rightarrow & H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow \cdots \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & \parallel \\ \cdots & \rightarrow & H_n^{cw}(A) & \rightarrow & H_n^{cw}(X) & \rightarrow & H_n^{cw}(X, A) \rightarrow H_{n-1}^{cw}(A) \rightarrow \cdots \end{array}$$

Die Eulercharakteristik

Euler-Polyeder-Formel (1758): Für ein konvexes
Polyeder mit E Ecken, K Kanten und F Flächen gilt
 $E - K + F = 2$.

Allgemeiner:

Def. IV.2.6 Sei X ein endlicher Zellkomplex. Dann heißt

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n |\pi_0(X^n \setminus X^{n-1})|$$

die **Eulercharakteristik** von X .

Def. IV.2.7 Für einen top. Raum X ist die **n -te Betti-Zahl**

$$b_n(X) := \text{rank}_{\mathbb{Z}} H_n(X; \mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{Q}} H_n(X; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \dim_{\mathbb{Q}} H_n(X; \mathbb{Q})$$

Satz IV.2.8 (Euler-Poincaré-Formel)

Sei X ein endlicher Zellkomplex. Dann gilt

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n b_n(X).$$

Bew. Setze $C_* := C_*^{CW}(X; H_*^{sing}(\cdot; \mathbb{Q}))$. Zeigen
allgemein: $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \dim_{\mathbb{Q}} C_n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \dim_{\mathbb{Q}} H_n(C_*)$ (*).

Betrachte $0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n(C_*) \rightarrow 0$

und $0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \rightarrow 0$.

Es folgt $\dim Z_n = \dim B_n + \dim H_n(C_*)$ und

$\dim C_n = \dim Z_n + \dim B_{n-1}$, also

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \dim C_n &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n (\dim Z_n + \dim B_{n-1}) = \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \dim H_n(C_*) + \sum_{n \geq 0} (-1)^n (\dim B_n + \dim B_{n-1}). \quad \square \end{aligned}$$

Kor. IV.2.9 Seien X, Y endliche Zellkomplexe mit $X \cong Y$.

Dann gilt $\chi(X) = \chi(Y)$. $\square$

Bsp. Falls X zusammenziehbar, gilt $\chi(X) = \chi(\cdot) = 1$
(Test auf Zusammenziehbarkeit, notwendig)

• $\chi(S^1) = 0$

• $\chi(\Sigma_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$

• $\chi(N_g) = 1 - g + 1 = 2 - g$

• $\chi(\mathbb{RP}^2) = \chi(N_1) = 1$ (nicht zusammenziehbar,
Test nicht hinreichend)

- $$\chi(X \times Y) = |I_0^X| \cdot |I_0^Y| - (|I_1^X| \cdot |I_0^Y| + |I_0^X| \cdot |I_1^Y|) + (|I_2^X| \cdot |I_0^Y| + |I_1^X| \cdot |I_1^Y| + |I_0^X| \cdot |I_2^Y|) \mp \dots$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot |I_i^X| \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \cdot |I_j^Y| \right) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$
- $\chi(S^1 \times X) = 0, \quad \chi(\mathbb{T}^d) = 0.$
- Sei $Y \rightarrow X$ n -blättrige Überlagerung. $\chi(Y) = n \cdot \chi(X)$
- Dennach: Gilt $\chi(X) \neq 0$, kann X sich nur trivial selbst überlagern.

Satz IV.2.10 (Additivität von χ)

Sei
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & Y \\ \downarrow \cap & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\quad} & Z \end{array}$$
 ein zelluläres Pushout. Dann gilt
$$\chi(Z) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(A).$$

Bew. Betrachte die M.V.S. für $H_*^{\text{sing}}(\cdot; \mathbb{Q})$ als Kettenkomplex mit verschwindender Homologie. Mit (*) folgt

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \dim H_n(A) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (\dim H_n(X) + \dim H_n(Y))$$

$$+ \sum_{n \geq 0} (-1)^n \dim H_n(Z) = 0. \quad \text{Mit IV.2.8 folgt die Beh. } \square$$

IV.3 Berechnung zellulärer Homologie

Ziel: Berechnung der Differentialen des zellulären Kettenkomplexes als ganzzahlige Matrizen. Beispiele.

Sei (X, A) ein relativer Zellkomplex. Wähle Pushout

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{i \in I_n} S^{n-1} & \xrightarrow{q_i^n} & X^{n-1} \\
 \downarrow \Gamma & & \downarrow \\
 \coprod_{i \in I_n} D^n & \xrightarrow{Q_i^n} & X^n
 \end{array}$$

Def. II.3.2 Für $n \geq 1$, sei $i \in I_n$, $j \in I_{n-1}$. Die **Inzidenzzahl** $\text{inc}_{i,j}^n \in \mathbb{Z}$ ist der Abbildungsgrad von $S^{n-1} \xrightarrow{q_i^n} X^{n-1} \rightarrow X^{n-1} / X^{n-1} \setminus e_j^{n-1} \xrightarrow{\overline{Q_j^{n-1}}^{-1}} D^n / S^{n-2} \xrightarrow{u_{n-1}} S^{n-1}$.

- nur wohldefiniert bis auf das Vorzeichen.
- Für $n=1$ bedeutet dies

$$\text{inc}_{i,j}^1 = \begin{cases} 1 & q_i^1(1) = Q_j^0(D^0), q_i^1(-1) \neq Q_j^0(D^0), \\ -1 & q_i^1(-1) = Q_j^0(D^0), q_i^1(1) \neq Q_j^0(D^0), \\ 0 & q_i^1(1) = q_i^1(-1). \end{cases}$$

- Sei $\text{INC}_n = (\text{inc}_{i,j}^n)$ die **n -te Inzidenzmatrix** (kann unendlich sein, hat aber wg. Satz II.1.3.(ii) nur endl. viele nicht verschwindende Einträge.)
- Sei (H_*, d_*) eine Homologietheorie (additiv, falls (X, A) unendlich.)
- Sei $\nu_n: H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i \in I_n} H_0(\cdot)$ (Kein Dimensionsaxiom erforderlich.)

Satz IV.3.2 Für $n \geq 1$ gilt

$$\begin{array}{ccc}
 C_n^{CW}(X, A; H_*) & \xrightarrow{\partial_n^{CW}} & C_{n-1}^{CW}(X, A; H_*) \\
 \downarrow \nu_n \cong & \sigma & \downarrow \nu_{n-1} \cong \\
 \bigoplus_{i \in I_n} H_0(\cdot) & \xrightarrow{\cdot INC_n} & \bigoplus_{i \in I_{n-1}} H_0(\cdot)
 \end{array}$$

Bew.

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(X^{n-1}) & & & & \\
 \cong \downarrow \sigma & \searrow \sigma & \swarrow \sigma & \searrow \sigma & & & \\
 \tilde{H}_n(D^n/S^{n-1}) \xrightarrow{H_n(\partial_1^n)} \tilde{H}_n(X^n/X^{n-1}) & & H_{n-1}(X^{n-1}/X_0) & \rightarrow & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & & \\
 \downarrow \sigma & \searrow \sigma & \swarrow \sigma & \searrow \sigma & & & \\
 \cong \downarrow \sigma & \searrow \sigma & \swarrow \sigma & \searrow \sigma & & & \\
 \tilde{H}_n(u_n) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) & \rightarrow & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) & \rightarrow & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-1} \setminus e_j^{n-1}) \\
 \downarrow \sigma & \searrow \sigma & \uparrow \tilde{H}_{n-1}(q_i) & \searrow \sigma & \uparrow \tilde{H}_{n-1}(\partial_j^{n-1}) \cong & & \\
 \tilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{\text{ausl.}} \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\cdot inc_{ij}} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) & \xleftarrow{\tilde{H}_{n-1}(u_{n-1})} & H_{n-1}(D^{n-1}/S^{n-2}) & & \\
 \cong \downarrow \text{aushängen}^{n-1} & \cong \downarrow \text{aushängen}^{n-1} & & & & & \\
 \tilde{H}_0(S^0) & & \tilde{H}_0(S^0) & & & & \\
 \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & & & \\
 H_0(\cdot) & \xrightarrow{\cdot inc_{ij}} & H_0(\cdot) & & & &
 \end{array}$$

Mit $\iota_i: H_0(\cdot) \rightarrow \bigoplus_{I_n} H_0(\cdot)$ und $\pi_j: \bigoplus_{I_{n-1}} H_0(\cdot) \rightarrow H_0(\cdot)$

ergibt sich $\pi_j \circ \nu_{n-1} \circ \partial_n^{CW} \circ \nu_n^{-1} \circ \iota_i = \cdot inc_{ij}$, also

$$\nu_{n-1} \circ \partial_n^{CW} \circ \nu_n^{-1} = \cdot INC_n.$$

□

Bemerkung: Insbesondere gilt $INC_{n+1} \cdot INC_n = 0$, was nicht so offensichtlich ist, wenn man $\pi_n(S^n, \cdot) \cong \mathbb{Z}$

homotopietheoretisch zeigt und so den Abbildungsgrad ohne Homologie definiert.

Bsp. IV.3.3 Sei (H_*, ∂_*) gewöhnlich und $H_0(\cdot) \cong \mathbb{Z}$. CW-Strukturen wie in Bsp. IV.1.4 - IV.1.7.

1.) $C_*^{CW}(S^n; H_*) =$

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \underset{\uparrow \text{grad } n}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \underset{\uparrow \text{grad } 0}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0 \quad (n \geq 1)$$

Alle Differenziale verschwinden (auch für $n=1$!)

$$\leadsto H_2^{CW}(S^n) \cong H_2(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n=0, 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2.) $C_*^{CW}(\Sigma_g; H_*) =$

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \underset{2}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot \text{INC}_2} \underset{1}{\mathbb{Z}^{2g}} \xrightarrow{0} \underset{0}{\mathbb{Z}} \rightarrow 0$$

Punkt der 2-Zelle:
$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{w} & \bigvee_{c=1}^{2g} S^1 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ D^2 & \longrightarrow & \Sigma_g \end{array}, \quad w = \prod_{c=1}^g [a_c, b_c].$$

 Jede 1-Zelle wird hin- und zurückgelaufen, also sind alle Abb. aus Def. 6.35 nullhomotop, d.h. $\text{INC}^2 = (0, \dots, 0)$.

$$\leadsto H_2(\Sigma_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & g=0, 2 \\ \mathbb{Z}^{2g} & g=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$3.) C_*^{CW}(\mathbb{R}P^d; \mathbb{H}_*) \cong$$

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d} \mathbb{Z} \xrightarrow{d-1} \cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Anheben der d -Zelle an das $(d-1)$ -Gerüst durch $S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{d-1}$. Zu bestimmen

$$\deg(S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{d-1}/\mathbb{R}P^{d-2} \cong S^{d-1}) = 1 + (-1)^d$$

Äquator
kollektieren

$$\rightarrow H_k(\mathbb{R}P^d) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0 \text{ oder } (k=d \text{ ungerade}) \\ \mathbb{Z}/2 & 0 < k < d \text{ und } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$4.) C_*^{CW}(\mathbb{C}P^d) =$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2d} 0 \xrightarrow{2d-2} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

$$\rightarrow H_k(\mathbb{C}P^d) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & 0 \leq k \leq 2d \text{ und } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

IV.4 Eindeutigkeit gewöhnlicher Homologie

Ziel: Alle gewöhnlichen und additiven Homologietheorien mit festem $H_0(\cdot) \cong M$ sind "äquivalent" auf CW⁽¹⁾.

Def. IV.4.1 Eine zelluläre Homologietheorie mit Werten in R-mod ist eine Familie von Funktoren $(H_n)_{n \in \mathbb{Z}}$,

$$H_n: \underline{CW}^{(1)} \rightarrow \underline{R-mod}$$

mit einer Familie natürlicher Transformationen

$$\partial_n: H_n \longrightarrow H_{n-1} \circ J,$$

wobei $J: \underline{CW}^{(n)} \rightarrow \underline{CW}^{(n)}$, $J(X, A) = (A, \emptyset)$,

$J(f: (X, A) \rightarrow (Y, B)) = f|_A: (A, \emptyset) \rightarrow (B, \emptyset)$, od.

1.) Homotopieinvarianz. Falls für $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ gilt $f \approx_h g$ mit $h_t(A) \subseteq B$ für alle $t \in I$, dann $H_n(f) = H_n(g)$, wobei f, g, h_t zellulär für alle $t \in I$.

2.) LES. Zu (X, A) gehören die Inklusionen

$$i: (A, \emptyset) \rightarrow (X, \emptyset) \text{ und } j: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$$

und diese induzieren die LES

$$\cdots \rightarrow H_n(A, \emptyset) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X, \emptyset) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n(X, A)} H_{n-1}(A, \emptyset) \rightarrow \cdots$$

3.) Ausschneidung. Sei $X = A \cup B$ für Teilkomplexe $A, B \subseteq X$. Dann gilt $H_n(A, A \cap B) \cong H_n(X, B)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Die zelluläre Homologietheorie heiße zudem gewöhnlich, falls das Dimensionaxiom gilt:

$$4.) H_n(\cdot, \emptyset) = 0 \text{ für } n \neq 0.$$

Gültig für zelluläre und nicht-zelluläre Theorien:

Def. IV.4.2 Seien $(H_*, \partial_*^H), (K_*, \partial_*^K)$ Homologietheorien mit Werten in R-mod. Eine natürliche Transformation von Homologietheorien ist eine Familie nat. Trafos. $\omega_*: H_* \rightarrow K_*$, od. für (X, A) , $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n^H} & H_{n-1}(A) \\
 \omega_n(X, A) \downarrow & & \downarrow \omega_{n-1}(X, A) \\
 K_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n^K} & K_{n-1}(A)
 \end{array}$$

kommutiert. Ist jedes ω_n ein nat. Iso., heißt ω_* eine Äquivalenz von Homologietheorien.

→ Kategorien Homol.-Theo., CW-Homol.-Theo..

→ Äquivalenzen sind. die Iso.s in diesen Kategorien.

→ Sei $F: \underline{CW}^{(2)} \rightarrow \underline{Top}^{(2)}$ vergesslich und sei (H_*, ∂_*) eine Homologietheorie. Dann ist $(H_* \circ F, \partial_* \circ F)$ eine zelluläre Homologietheorie (Ausdehnung: $X = A \cup B$ durch Teilkomplexe, dann ist $\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{\quad} & B \\ \downarrow \Gamma & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$ zellulär, also homotopie-kohärent), daher haben wir den Mayer-Vietoris-Iso $H_n(X, B) \cong H_n(A, A \cap B)$, siehe Beweis von III.3.3)

Satz IV.4.3 Sei (H_*, ∂_*) eine gewöhnliche und additive Homologietheorie mit Werten in R-Kod. Dann gibt es eine Äquivalenz von Homologietheorien $\omega_*: H_* \circ F \xrightarrow{\cong} H_*^{CW}$.

Bew. Satz IV.2.2 und Prop. IV.2.5. □

Außerdem gilt $\omega_0(\cdot) = \text{id}_{H_0(\cdot)}$ nach Konstruktion.

Satz IV.4.4 Seien H_* , K_* gewöhnliche, additive Homologietheorien mit Werten in R-Mod. Sei $f: H_0(\cdot) \rightarrow H_0(\cdot)$ ein R-Modulhom. Dann gibt es eine nat. Trafo.

$$\omega_*^f: H_* \circ F \rightarrow K_* \circ F$$

zellulärer Homologietheorien mit $\omega_0^f(\cdot) = f$.

Ist f ein Iso., so ist ω_*^f eine Äquivalenz.

Bew. Wg. Satz IV.4.3 bleibt zu konstruieren:

$$\tilde{\omega}_*^f: H_*^{cw} \rightarrow K_*^{cw}$$

mit $\tilde{\omega}_0^f(\cdot) = f$, sd. $\tilde{\omega}_*^f$ nat. Iso.s sind, falls f ein Iso. ist. Konstruieren stärker eine nat. Trafo.

$$\tilde{\Omega}_*^f: C_*^{cw}(\cdot, \cdot; H_*) \rightarrow C_*^{cw}(\cdot, \cdot; K_*)$$

mit $\tilde{\Omega}_0^f(\cdot) = f$ und $\tilde{\Omega}_*^f$ nat. Iso., falls f Iso.

Setzen dann $\tilde{\omega}_n^f = H_n(\tilde{\Omega}_*^f(X, A))$ (Komposition mit Funktor überführt nat. Trafo./Iso. in nat.

Trafo./Iso.). Die zusätzliche Natürlichkeitsbed. $\partial_n^{cw, K} \circ \tilde{\omega}_n^f = \tilde{\omega}_{n-1}^f \circ \partial_n^{cw, H}$ folgt aus der Natürlichkeitsaussage von Satz 4.4. für

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow C_*^{cw}(A; H_*) & \rightarrow & C_*^{cw}(X; H_*) & \rightarrow & C_*^{cw}(X, A; H_*) & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow \tilde{\Omega}_*^f(X) & & \downarrow \tilde{\Omega}_*^f(X) & & \downarrow \tilde{\Omega}_*^f(X, A) & \\ 0 \rightarrow C_*^{cw}(A; K_*) & \rightarrow & C_*^{cw}(X; K_*) & \rightarrow & C_*^{cw}(X, A; K_*) & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Konstruieren nun $\tilde{\Omega}_*^f$. Sei (X, A) ein CW-Paar.
 Betrachte (X, A) als rel. Zellkomplex und wähle Pushouts

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I_{n-1}} S^{n-1} & \xrightarrow{\coprod q_i^n} & X^{n-1} \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \coprod_{i \in I_n} D^n & \xrightarrow{\coprod Q_i^n} & X^n \end{array}$$

Mit den Doo.s. $\nu_n^{H_*}$ und $\nu_n^{K_*}$ aus Satz 6.36 sei

$$\tilde{\Omega}_*^f: C_n^{CW}(X, A; H_*) \xrightarrow{\nu_n^{H_*}} \bigoplus_{i \in I_n} H_0(\cdot) \xrightarrow{\oplus f} \bigoplus_{i \in I_n} K_0(\cdot) \xrightarrow{(\nu_n^{K_*})^{-1}} C_n^{CW}(X, A; K_*).$$

Dies definiert eine Kettenabbildung, denn

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{\Omega}_*^f: C_n^{CW}(X, A; H_*) & \xrightarrow{\nu_n^{H_*}} & \bigoplus_{i \in I_n} H_0(\cdot) & \xrightarrow{\oplus f} & \bigoplus_{i \in I_n} K_0(\cdot) & \xrightarrow{(\nu_n^{K_*})^{-1}} & C_n^{CW}(X, A; K_*) \\ \partial_n^{CW, H} \downarrow & \sigma & \cdot \text{inc}_n \downarrow & \sigma & \cdot \text{inc}_n \downarrow & \sigma & \downarrow \partial_n^{CW, K} \\ \tilde{\Omega}_*^f: C_{n-1}^{CW}(X, A; H_*) & \xrightarrow{\nu_{n-1}^{H_*}} & \bigoplus_{i \in I_{n-1}} H_0(\cdot) & \xrightarrow{\oplus f} & \bigoplus_{i \in I_{n-1}} K_0(\cdot) & \xrightarrow{(\nu_{n-1}^{K_*})^{-1}} & C_{n-1}^{CW}(X, A; K_*) \end{array}$$

Es gilt:

- $\tilde{\Omega}_*^f(X, A)$ ist Doo. $\Leftrightarrow f$ ist Doo.
- $\tilde{\Omega}_0^f(\cdot) = f$.

Somit bleibt zu zeigen:

- $\tilde{\Omega}_*^f(X, A)$ unabh. von Wahl der (Q_i^n, q_i^n) .
- $\tilde{\Omega}_*^f(X, A)$ ist nat. bzgl. $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ Zell.

Zu (i): Sei (P_i^n, p_i^n) eine zweite Wahl. Haben

$$\begin{array}{ccc}
 & (\overline{p_i})^{-1} \circ \overline{q_i} & \\
 D^{\sim}/S^{n-1} & \xrightarrow{\cong} & D^{\sim}/S^{n-1} \\
 \cong \downarrow u_n & & \cong \downarrow u_n \\
 S^n & \xrightarrow{\cong} & S^n
 \end{array}$$

mit $\deg = \pm 1$. Betrachte

$$\begin{array}{ccccccc}
 \oplus \tilde{H}_n(Q_i^{\sim}) & \oplus H_0(\cdot) & \xrightarrow{\oplus f} & \oplus K_0(\cdot) & \oplus \tilde{K}_n(Q_i^{\sim}) \\
 \swarrow & \downarrow \oplus \text{id} & \circlearrowleft \text{III.4.2} & \downarrow \oplus \text{id} & \searrow \\
 \tilde{H}_n(X^{\sim}/X^{n-1}) & & & & \tilde{K}_n(X^{\sim}/X^{n-1}) \\
 \nwarrow & \oplus \tilde{H}_n(P_i^{\sim}) & \oplus H_0(\cdot) & \xrightarrow{\oplus f} & \oplus K_0(\cdot) & \oplus \tilde{K}_n(P_i^{\sim}) & \nearrow
 \end{array}$$

mit $H_0(\cdot) \cong \tilde{H}_n(S^n)$, $K_0(\cdot) \cong \tilde{K}_n(S^n)$ implizit.

Zu (ii): Für Zellen $e_i^{\sim} \in X$, $f_j^{\sim} \in Y$ sei $\text{inc}_{i,j}^{\sim}(g) \in \mathbb{Z}$ Abt. grad von

$$D^{\sim}/S^{n-1} \xrightarrow{\overline{Q_i^{\sim}(X)}} X^{\sim}/X^{n-1} \xrightarrow{\tilde{g}} Y^{\sim}/Y^{n-1} \rightarrow Y^{\sim}/Y^{n-1} \setminus f_j^{\sim} \xrightarrow{(\overline{Q_j^{\sim}(Y)})^{-1}} D^{\sim}/S^{n-1}.$$

und $\text{INC}_n(g) = (\text{inc}_{i,j}^{\sim}(g))$. Dann folgt $(\cdot \text{INC}_n(g)) \circ \nu_n = \nu_n \circ C_{*}^{\text{cw}}(g; H_*)$ ähnlich wie in 6.36 und

daraus

$$\begin{array}{ccc}
 C_{*}^{\text{cw}}(X, A; H_*) & \xrightarrow{C_{*}^{\text{cw}}(g)} & C_{*}^{\text{cw}}(Y, B; H_*) \\
 \tilde{\Omega}_{*}^f(X, A) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \tilde{\Omega}_{*}^f(Y, B) \\
 C_{*}^{\text{cw}}(X, A; k_*) & \xrightarrow{C_{*}^{\text{cw}}(g)} & C_{*}^{\text{cw}}(Y, B; k_*)
 \end{array}$$

wie oben.

□

- Gerade gesehen: $f: H_0(\cdot) \xrightarrow{\cong} K_0(\cdot)$ induziert
 $C_*^{CW}(X, A; H_*) \cong C_*^{CW}(X, A; K_*)$ natürlich in (X, A) .
- Zuvor gesehen: für jeden R -Modul M gibt es
 eine gewöhnliche, additive Homologietheorie
 $H_* = H_*^{\text{sing}}(\cdot; M)$.

→ Es gibt einen Funktor

$$C_*^{CW}(\cdot, \cdot; M) : \underline{CW}^{(2)} \rightarrow \underline{R\text{-chain}},$$

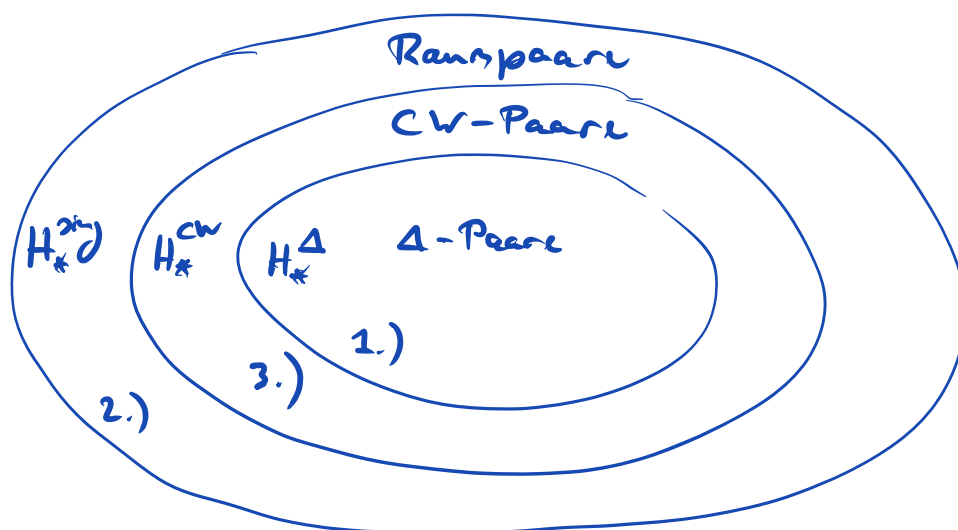
sodass $H_n^{CW} = H_n(C_*^{CW}(\cdot, \cdot; M))$ mit ∂_n^{CW} aus

$$0 \rightarrow C_*^{CW}(A; M) \rightarrow C_*^{CW}(X; M) \rightarrow C_*^{CW}(X, A; M) \rightarrow 0$$

eine zelluläre Homologietheorie ist (ohne Referenz
 zu einer vorgegebenen Homologietheorie!)

Wir nennen $(H_*^{CW}, \partial_*^{CW})$ die zelluläre Homologie
 (und lassen "CW" meistens weg.)

Logik der Vorlesung:



IV.5 Wie geht es weiter?

- Homologische Algebra (freie/projektive Auflösungen von Modulen über (nicht notwendig kommutativen) Ringen, Fundamentalsatz)

Anwendungen:

- Wie hängt $H_n(X, A; R)$ mit $H_n(X, A; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R$ zusammen? (UCT)

- Wie berechnet man $H_n(X \times Y; R)$ aus $H_n(X; R)$ und $H_n(Y; R)$? Wann gilt

$$H_n(X \times Y; R) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(X; R) \otimes_R H_q(Y; R)?$$

- Kohomologie ($C^*(X; R) := \text{Hom}_R(C_*(X; R), R)$, $d^*(u) = u \circ d_{*+1}$, $f: X \rightarrow Y$ induziert $f^*: C^*(Y; R) \rightarrow C^*(X; R)$, $u \mapsto u \circ f_*$)

$$\text{Verzahnung: } C^p(X) \times C^q(Y) \rightarrow C^{p+q}(X \times Y) \\ (e^p, e^q) \mapsto (e^p \times e^q)$$

$$\text{induziert } H^p(X) \times H^q(Y) \rightarrow H^{p+q}(X \times Y)$$

Für $X = Y$ erhalten wir

$$\cup: H^p(X) \times H^q(X) \rightarrow H^{p+q}(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} H^{p+q}(X)$$

„Cup-Produkt“ $\leadsto H^*(X) := \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X)$ ist

ein graduierter Ring (und $H_*(X)$ ein $H^*(X)$ -Rechts-

modul. Z.B.: $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2[\alpha]$,

$$H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha] \text{ mit } \deg \alpha = 2.$$

- Poincaré-Dualität: Für (orientierbare, kompakte) Mannigfaltigkeiten der Dim. n gilt

$$H_k(M) \cong H^{n-k}(M).$$
 Mit UCT folgt insbes. $b_k(M) = b_{n-k}(M).$

Weitere mögliche Themen:

- Klassifizierung von Faserbündeln ($b_G(X) \cong [X, BG]$)
- Charakteristische Klassen (nat. Trafo. $c: b_G \xrightarrow{\cong} H^*$,
 Yoneda: nat. Trafo. $(b_G, H^*) \cong H^*(BG)$)
- Kohomologieoperationen (nat. Trafo. $\eta: H^* \rightarrow H^{*+1}$,
 Dup. $U: H^n \rightarrow H^{2n}$, Steenrod algebra)
- K-Theorie ($\text{Vect}(X)$ mit $\oplus, \sim$ Grothendieck $\leadsto K^0(X)$)
- Spektralsequenzen $F \hookrightarrow E \rightarrow B$, $H^p(B, H^q(F)) \Rightarrow H^{p+q}(E)$
- Spektra und die homotopietheoretische Konstruktion der Kohomologie. $H^n(X; G) \cong [X, K(G, n)]$

$$\begin{array}{ccc} f^*c & \leftarrow & f \end{array}$$

$$\begin{aligned} H^n(K(G, n); G) &\cong \text{Hom}(H_n(K(G, n)), G) \cong \\ &\cong \text{Hom}(\pi_n(K(G, n)), G) \cong \\ &\cong \text{Hom}(G, G) \\ c &\mapsto \text{id}_G \end{aligned}$$
- $\Omega K(G, n) \cong K(G, n-1) \rightarrow$ Brown-Darstellungssatz
 (reduzierte zelluläre) Kohomologietheorien werden von „ Ω -Spektra“ dargestellt.