Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Topologie II, SoSe 23
Blatt 1

Auf dem gesamten Blatt ist R ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring.

Aufgabe 1:
Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Für $R = \mathbb{Z}$ ist die Lefschetz-Zahl jeder Abbildung $\mathbb{P}^{2n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^{2n}(\mathbb{R})$ gleich.

(ii) Jede Abbildung $S^n \to S^n$ mit $\deg(f) \neq (-1)^{n+1}$ besitzt einen Fixpunkt.

(iii) Die Umkehrung des Lefschetzschen Fixpunktsatzes gilt auch.

Aufgabe 2:
Weisen Sie nach, dass ein endlich erzeugter R-Modul M genau dann projektiv ist, wenn er isomorph zum Bild einer Projektion (im Sinne der linearen Algebra), also einer R-linearen Abbildung $P \in \mathrm{End}(R^n)$ mit $P^2 = P$ ist.

Aufgabe 3:
Sei M_i, $i \in I$, eine Familie von R-Moduln und sei $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Zeigen Sie, dass M genau dann projektiv ist, wenn die R-Moduln M_i für alle $i \in I$ projektiv sind. Wie verhält sich obige Aussage, wenn wir die direkte Summe durch das Tensor-Produkt ersetzen?

Aufgabe 4:
Wir betrachten folgende kurze exakte Sequenzen von R-Moduln:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0 \qquad\qquad 0 \longrightarrow M' \longrightarrow P' \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

Angenommen, P und P' sind projektiv. Zeigen Sie, dass dann $M \oplus P'$ isomorph zu $M' \oplus P$ ist.