

Topologie II – Blatt 3

22. Oktober 2026

Auf dem gesamten Blatt seien R und S (nicht notwendigerweise kommutative) Ringe.

Aufgabe 1.

- (i) Zeigen Sie, dass Tensorprodukte assoziativ sind, d.h. wenn A ein R -Rechtsmodul, B ein R - S -Bimodul und C ein S -Linksmodul ist, so ist $(A \otimes_R B) \otimes_S C \cong A \otimes_R (B \otimes_S C)$.
- (ii) Wir hatten gesehen, dass Tensorprodukte verträglich mit direkten Summen sind:

$$M \otimes_R \left(\bigoplus_{i \in I} N_i \right) \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_R N_i) \quad \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes_R N \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$$

Was passiert, wenn wir die direkten Summen durch Produkte ersetzen?

Aufgabe 2.

Zeigen Sie, dass ein Funktor $F: \text{Mod}_R \rightarrow \text{Ab}$ genau dann linksexakt ist, wenn er endliche direkte Summen und Kerne erhält. Dual dazu gilt dann auch, dass F genau dann rechtsexakt ist, wenn F endliche direkte Summen und Kokerne erhält. Folgern Sie daraus, dass Linksadjungierte Funktoren rechtsexakt und Rechtsadjungierte Funktoren linksexakt sind.

Aufgabe 3.

Sei $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Überprüfen Sie folgende Endofunktoren der Kategorie $\text{Ab} = \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$ auf ihre Rechts- und Linksexaktheit:

- (i) $A \mapsto \text{Div}_m(A) = \{a \in A \mid \text{es existiert } b \in A \text{ mit } mb = a\}$
- (ii) $A \mapsto A_{\text{tf}} = A/A_{\text{tors}}$, wobei $A_{\text{tors}} = \{a \in A \mid \text{ord}(a) \leq \infty\}$ die Torsionsuntergruppe ist
- (iii) $A \mapsto A[m] = \{a \in A \mid ma = 0\}$

Aufgabe 4.

- (i) Weisen Sie nach, dass der Gruppenring $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$ isomorph zu $\mathbb{Z}[x]/(x^n - 1)$ ist.
- (ii) Wir betrachten $\mathbb{Z}$ als trivialen $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$ -Modul. Berechnen Sie die Gruppenhomologie $H_k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \text{Tor}_k^{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.
- (iii) Folgern Sie aus Ihrer Berechnung, dass $H_k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; \mathbb{Q}) = 0$ für alle $k \geq 1$ ist.