Tropische Geometrie – Blatt 1

Prof. Immanuel Halupczok
M.Sc. Saba Aliyari

Aufgabe 1:

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \infty & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_\infty^{2\times 2}$ und $v := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_\infty^2$.

(a) Bestimmen Sie $A \odot v$, $A^{\odot 2} \odot v$ und $A^{\odot 3} \odot v$. Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 3$ gilt: $A^{\odot n} \odot v = A^{\odot 3} \odot v$.

(b) Für welche Vektoren $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_\infty^2$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $A^{\odot n} \odot w = A^{\odot(n+1)} \odot w$ gilt?
Hinweis: Es kann sinnvoll sein, eine Fallunterscheidung danach zu machen, ob w_1 und/oder w_2 gleich ∞ sind.

Aufgabe 2:

Wir betrachten das tropische Polynom $f(x) = x^{\odot 2} \oplus 4$.

(a) Zeigen Sie, dass f, als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ aufgefasst, aus zwei linearen Stücken besteht, d. h. dass gilt:

$$f(x) = \begin{cases} a_1 x + b_1 & \text{falls } x < c \\ a_2 x + b_2 & \text{falls } x \geq c \end{cases}$$

Was sind a_1, b_1, a_2, b_2, c?

(b) Wir wählen jetzt ein $d \in \mathbb{R}$ und betrachten außerdem das tropische Polynom $g(x) = x^{\odot 2} \oplus d \odot x \oplus 4$. Für welche Werte von d ist der Summand $d \odot x$ „unnötig“, d. h. für welche d gilt $g(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$?