Tropische Geometrie – Blatt 5

Prof. Immanuel Halupczok
M.Sc. Saba Aliyari

Aufgabe 1 (1+2 Punkte):

Zeigen Sie:

(a) Die Einheiten von $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ sind genau $\{a \in \mathbb{K} \mid v(a) = 0\}$.

(b) Die Menge $\{a \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}} \mid v(a) > 0\}$ ist ein Ideal von $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, und dieses Ideal ist sogar maximal (d. h. jedes Ideal, das echt größer ist, ist bereits der ganze Ring $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$).

Aufgabe 2 (7 Punkte):

Sei $a = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \in \mathbb{K}$. Bestimmen Sie das multiplikative Inverse a^{-1}, indem Sie es schrittweise annähern. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Wählen Sie $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r_0 \in \mathbb{R}$ so, dass $b_0 := z_0\varepsilon^{r_0}$ eine „best-mögliche Annäherung an a^{-1} ist, im Sinne von: $a \cdot b_0$ soll möglichst nah an 1 sein, d. h. $v(a \cdot b_0 - 1)$ soll möglichst groß sein.

(b) Wählen Sie jetzt $z_1 \in \mathbb{C}$ und $r_1 \in \mathbb{R}$ so, dass $b_1 := b_0 + z_1\varepsilon^{r_1}$ eine noch bessere Annähernung an a^{-1} ist.

(c) Fahren Sie so fort, z_n und r_n so zu wählen, dass $b_n := \sum_{i=0}^{n} z_i\varepsilon^{r_i}$ eine möglichst gute Annäherung ist. Nach einigen Schritten sollten Sie ein Muster erkennen.

(d) Setzen Sie die Reihe so fort, wie es das Muster suggeriert. Zeigen Sie, dass diese Reihe tatsächlich gleich a^{-1} ist.