Prof. Immanuel Halupczok
M.Sc. Saba Aliyari

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Ist $a \in \mathbb{K}$ und $r \in \mathbb{R}$, so definieren wir den Ball um a mit Bewertungs-Radius r als $B_r(a_,) = \{b \in \mathbb{K} \mid v(b-a) \geq r\}$.

Zeigen Sie, dass in $\mathbb{K}$ gilt: Jeder Punkt eines Balls ist Mittelpunkt des Balls; also genauer: Ist $b \in B_r(a)$, so ist $B_r(b) = B_r(a)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Ist $f \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom und $a \in \mathbb{C}$, so ist die Ableitung von f an der Stelle a bekanntlich gegeben durch

$$f'(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}$$

(wobei ε über $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ läuft). Zeigen Sie, dass man die Ableitung auch bestimmen kann, indem man unser „unendlich kleines“ ε aus $\mathbb{K}$ verwendet, nämlich dass (für $f \in \mathbb{C}[X]$ und $a \in \mathbb{C}$) gilt:

$$f'(a) = \operatorname{res}\left(\frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}\right).$$

Aufgabe 3 (2+3 Punkte):

Seien $a_i \in \mathbb{K}$ für $i \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{K}$. Wir sagen, dass die Folge a_i gegen b konvergiert (und schreiben $\lim_{i\to\infty} a_i = b$) falls für jedes $r \in \mathbb{R}$ ein n existiert, so dass für alle $i \geq n$ gilt: $v(a_i - b) \geq r$.

Zeigen Sie:

(a) Laut Lemma 2.1.9 aus der Vorlesung konvergiert die Summenfolge $s_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$ konvergiert genau dann (gegen ein Element aus $\mathbb{K}$), wenn $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$ ist. Bisher wurde aber nur „$\Leftarrow$“ gezeigt. Zeigen Sie „$\Rightarrow$“.

(b) Zeigen Sie, dass Polynome im (Sinne der obigen Grenzwertdefinition) stetig sind, d. h. ist $f \in \mathbb{K}[X]$ und $\lim_{i\to\infty} a_i = b$, so gilt auch $\lim_{i\to\infty} f(a_i) = f(b)$.