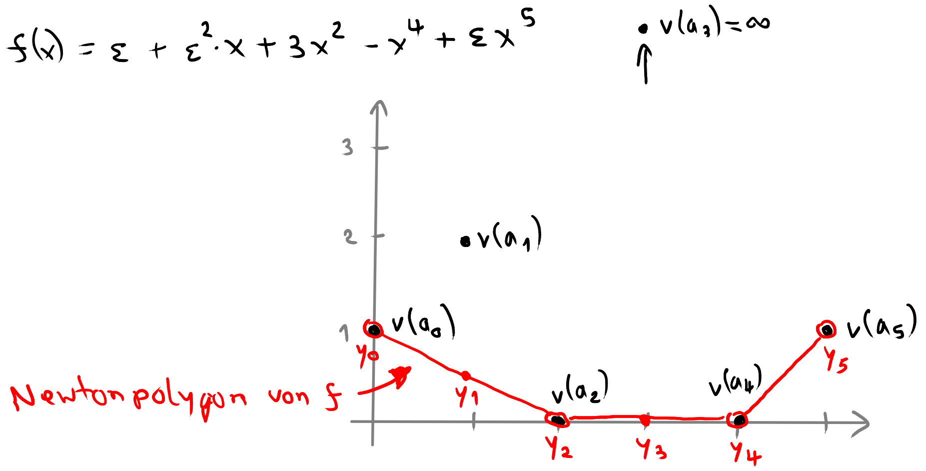
Prof. Immanuel Halupczok
M.Sc. Saba Aliyari

Aufgabe 1 (3+3+4 Punkte):

Sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom vom Grad n; wir nehmen an, dass $a_0 \neq 0$ ist.

Das Newton-Polygon von f ist definiert als die untere konvexe Hülle der Punkte $(0, v(a_0)), (1, v(a_1)), \ldots, (n, v(a_n))$, wie im folgenden Beispiel:



Das Newtonpolygon geht also insbesondere durch Punkte $(0, y_0), (1, y_1), \ldots, (n, y_n)$, die jeweils durch gerade Segmente verbunden sind. Die Steigung des Segments zwischen $(i-1, y_{i-1})$ und (i, y_i) ist die Differenz $y_i - y_{i-1}$.

(a) Begründen Sie, dass die folgenden Bedingungen an die y_i das Newtonpolygon eindeutig charakterisieren:
- Für jedes i ist $y_i \leq v(a_i)$.
- Ist $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ und haben die Segmente links und rechts vom Punkt (i, y_i) verschiedene Steigungen, so ist $y_i = v(a_i)$.

(Sie brauchen dies nicht ganz formal zu beweisen.)

Wir wollen nun zeigen:

($\star$) Sind $\beta_i = y_{i-1} - y_i$ (für $i = 1, \ldots, n$) die negativen der Steigungen der Segmente des Newtonpolygons, so ist $\operatorname{trop} f = \gamma \odot \bigodot_{i=1}^{n} (x \oplus \beta_i)$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$, d. h. die β_i sind genau die Wurzeln von $\operatorname{trop} f$, und sie tauchen in der richtigen Vielfachheit auf.

Zeigen Sie dazu folgendes:

(b) Das Newtonpolygon hat ein horizontales Segment genau dann, wenn 0 eine Wurzel von $\operatorname{trop} f$ ist, und falls dies der Fall ist, ist die Anzahl der horizontalen Segmente gleich der Vielfachheit der Wurzel 0 von $\operatorname{trop} f$.
Hinweis: Es gab in der Vorlesung ein Lemma, aus dem dies leicht folgt.

(c) Laut Vorlesung kann man f so verändern, dass die jede Wurzel β von $\operatorname{trop} f$ nach $\beta + \mu$ verschoben wird. Untersuchen Sie, was dieser Veränderung mit dem Newtonpolygon macht und beenden Sie auf diese Weise den Beweis von ($\star$).