Prof. Immanuel Halupczok
M.Sc. Saba Aliyari

Tropische Geometrie – Blatt 8

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Zeigen Sie, dass die Vereinigung von zwei Varietäten $V_1, V_2 \subset \mathbb{K}^n$ wieder eine Varietät ist.

Hinweis: Betrachten Sie (als Aufwärmübung) erst den Fall, dass V_1 und V_2 jeweils durch ein Polynom definiert werden.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Sei $f \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ ein Polynom. Zeigen Sie: Ist die Varietät $V(f)$ irreduzibel, so ist auch das Polynom f irreduzibel.

(Bemerkung: Die Umkehrung gilt auch.)

Aufgabe 3 (4+1+1 Punkte):

Seien $f, g \in \mathbb{R}_\infty[x_1, \dots, x_n]$ tropische Polynome. Zur Erinnerung: $V(f)$ ist die Menge der tropischen Wurzeln von f. Zeigen Sie:

(a) $V(f \odot g) = V(f) \cup V(g)$.

(b) Ist $g^n = f$, so ist $V(g) = V(f)$.

(c) Folgern Sie: Ist $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, so ist $\operatorname{trop}(V(f)) = V(\operatorname{trop} f)$.