

**Aufgabe 1 (1+1+1 Punkte):**

Seien  $f(x, y) = (x - 1)(y - 1)$  und  $g(x, y) = (x - 2)(y - 2)$ .

- (a) Bestimmen Sie  $V := V(f, g) \subset \mathbb{K}^2$ .
- (b) Bestimmen Sie  $V(\text{trop } f)$  und  $V(\text{trop } g)$ .
- (c) Ist  $f, g$  eine tropische Basis von  $I(V)$ ? Wenn nein, geben Sie eine tropische Basis an.

**Aufgabe 2 (1+2+2+2 Punkte):**

Sei  $f \in \mathbb{C}[x]$  ein Polynom und sei  $V := \{(z, f(z)) \mid z \in \mathbb{K}\}$  der Graph von  $f$  in  $\mathbb{K}^2$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $V$  eine Varietät ist.
- (b) Zeigen Sie, dass der Graph von  $\text{trop } f$  eine Teilmenge von  $\text{trop } V$  ist.
- (c) Wie kann man  $f$  ansehen, ob der Graph von  $\text{trop } f$  eine echte Teilmenge von  $\text{trop } V$  ist, und wie unterscheiden sich  $\text{trop } f$  und  $\text{trop } V$  in diesem Fall?
- (d) Wie hängt  $\text{trop } V$  mit dem Grad von  $f$  und mit der Vielfachheit der Nullstelle 0 von  $f$  zusammen? Erklären Sie anschaulich (mit der Vorstellung von  $\varepsilon$  als sehr kleiner Zahl), warum dies Sinn ergibt.