Tropische Geometrie – Kurzskript

Inhaltsverzeichnis

1 Tropische lineare Algebra **2**

1.1 Tropische Zahlen, Vektoren und Matrizen 2

1.2 Tropische Eigenvektoren und Eigenwerte 4

1.3 Tropische Polynome 5

1.4 Die tropische Determinante und das tropische charakteristische Polynom 6

2 Tropische Algebra **7**

2.1 Tropikalisierung 7

2.2 Varietäten 8

2.3 Tropische Varietäten 9

2.4 Beweise für Hyperflächen 10

2.5 Beweise im Allgemeinen 10

1 Tropische lineare Algebra

1.1 Tropische Zahlen, Vektoren und Matrizen

Definition 1.1.1 *Wir setzen $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und definieren darauf die* ***tropische Addition*** *und* ***tropische Multiplikation*** *durch $a \oplus b := \min\{a, b\}$ und $a \odot b := a + b$. (Wir setzen $a \oplus \infty = \infty \oplus a = a$ und $a \odot \infty = \infty \odot a = \infty$ für alle $a \in \mathbb{R}_\infty$.) Außerdem setzen wir $a^{\odot n} := \underbrace{a \odot \ldots \odot a}_{n \text{ mal}} = na$ für $a \in \mathbb{R}_\infty$ und $n \in \mathbb{N}$. Und auch, für $a \in \mathbb{R}$: $a^{\odot -n} = -na$.*

Lemma 1.1.2 *$(\mathbb{R}_\infty, \oplus, \odot)$ ist ein kommutativer Semiring, d. h.*

(a) *$\oplus$ und $\odot$ sind kommutativ und assoziativ.*
(b) *Es existiert ein neutrales Element für $\oplus$ (nämlich ∞) und für $\odot$ (nämlich 0); genauer: Für alle $a \in \mathbb{R}_\infty$ gilt $a^{\oplus}\infty = a$ und $a \odot 0 = a$.*
(c) *Das additiv neutrale Element (∞) annuliert $\mathbb{R}_\infty$, d. h. $\infty \odot a = \infty$ für alle $a \in \mathbb{R}_\infty$.*
(d) *Distributivität: Für $a, b, c \in \mathbb{R}_\infty$ gilt: $(a \oplus b) \odot c = a \odot c \oplus b \odot c$.*

Außerdem existieren multiplikative Inverse von Elementen $a \in \mathbb{R}$, nämlich $a^{\odot -1}$.

Lemma 1.1.3 *Für alle $a, b \in \mathbb{R}_\infty$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

(a) *$(a \odot b)^{\odot n} = a^{\odot n} \odot b^{\odot n}$.*
(b) *$(a \oplus b)^{\odot n} = a^{\odot n} \oplus b^{\odot n}$.*

Definition 1.1.4 *Seien $v = (v_k)_k, w = (w_k)_k \in \mathbb{R}^n_\infty$ („**tropische Vektoren**“), $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{\ell \times m}_\infty$, $B = (b_{jk})_{jk} \in \mathbb{R}^{m \times n}_\infty$ („**tropische Matrizen**“) und $r \in \mathbb{R}_\infty$. Wir setzen:*

(a) $v \oplus w := \begin{pmatrix} v_1 \oplus w_1 \\ \vdots \\ v_n \oplus w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_\infty$

(b) $r \odot v := \begin{pmatrix} r \odot v_1 \\ \vdots \\ r \odot v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_\infty$

(c) $B \odot v := \begin{pmatrix} \bigoplus_j b_{1j} \odot v_j \\ \vdots \\ \bigoplus_j b_{mj} \odot v_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m_\infty$.

(d) ***tropische Matrizenmultiplikation**:*

$$A \odot B := \begin{pmatrix} \bigoplus_j a_{1j} \odot b_{j1} & \ldots & \bigoplus_j a_{1j} \odot b_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ \bigoplus_j a_{\ell j} \odot b_{j1} & \ldots & \bigoplus_j a_{\ell j} \odot b_{jn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell \times n}_\infty$$

(e) *Die **tropische Einheitsmatrix**:*

$$I := \begin{pmatrix} 0 & \infty & \ldots & \infty \\ \infty & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \infty \\ \infty & \ldots & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

(f) *Im Fall* $m = n$ *setzen wir* $B^{\odot k} := \underbrace{B \odot \ldots \odot B}_{k \text{ mal}}$ *für* $k \geq 1$ *und* $B^{\odot 0} := I$.

Lemma 1.1.5 *Tropische Matrizenmultiplikation ist assoziativ und hat* I *als neutrales Element.*

Bemerkung 1.1.6 *Alles, was wir machen, gilt analog auch mit umgedrehten Vorzeichen, d. h. statt* $a \oplus b = \min\{a, b\}$ *verwenden wir* $a \bar{\oplus} b := \max\{a, b\}$ *und statt* ∞ *verwenden wir* $-\infty$.

Definition 1.1.7 (a) *Ein (gerichteter)* ***Graph*** $G = (V, E)$ *besteht aus einer Menge* V Ecken *und einer Menge* $E \subset V \times V$ *von Kanten. (Man malt die Ecken als Punkte, und für jede Kante* $(p, q) \in E$ *malt man einen Pfeil von* p *nach* q*.)*

(b) *Ein* ***gewichteter Graph*** *ist ein Graph* G *zusammen mit einer Funktion* $f : E \to \mathbb{R}$*. (Man schreibt die Werte von* f *an die entsprechenden Pfeile.)*

(c) *Seien* $p, q \in V$*. Ein* ***Weg*** W *von* p *nach* q *ist eine Folge von Ecken* $p = p_0, \ldots, p_n = q$ *mit* $(p_{i-1}, p_i) \in E$ *für* $i = 1, \ldots, n$*. Die (Schritt-)**Länge** dieses Wegs ist* n*. Ist* G *gewichtet, so ist die* ***gewichtete Länge*** *des Wegs* $\sum_{i=1}^{n} f((p_{i-1}, p_i))$*. Wir werden das den* ***Preis*** *von* W *nennen und* $\mathrm{Preis}(W)$ *dafür schreiben.*

(d) *Ein* ***Zykel*** *ist ein Weg der Form* $p_0, p_1, \ldots, p_n = p_0$ *für* $n \geq 1$.

(e) *Ein Graph* G *ist* ***stark zusammenhängend****, wenn für alle* $p, q \in V$ *ein* ***Weg*** *von* p *nach* q *entlang der Pfeile existiert, d. h. eine Folge* $p = p_0, p_1, \ldots, p_n = q$ *aus* V *mit* $(p_i, p_{i+1}) \in E$*. Besteht* G *aus nur einer einzigen Ecke* p*, so fordern wir, dass ein Weg von* p *nach* p *existiert.*

Definition 1.1.8 *Einer quadratischen tropischen Matrix* $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}_\infty^{n \times n}$ *ordnen wir den folgenden gewichteten Graph* $G(A) = (V, E, f)$ *zu:* $V = \{1, \ldots, n\}$. $E = \{(j, i) \mid a_{ij} \neq \infty\}$, $f((j, i)) = a_{ij}$.

Lemma 1.1.9 *Sei* $A \in \mathbb{R}_\infty^{n \times n}$*. Dann gilt:*

(a) *Ist* $A^{\odot r} = (b_{ij})_{ij}$*, so ist* b_{ij} *der Preis des billigstens Weges von* j *nach* i *der Länge* r*, bzw.* $b_{ij} = \infty$ *falls kein Weg der Länge* r *von* j *nach* i *existiert.*

(b) *Ist* $I \oplus A \oplus A^{\odot 2} \oplus \ldots \oplus A^{\odot r} = (b_{ij})_{ij}$*, so ist* b_{ij} *der Preis des billigstens Weges von* j *nach* i *ist der Länge höchstens* r*, bzw.* $b_{ij} = \infty$ *falls kein Weg der Länge* $\leq r$ *von* j *nach* i *existiert.*

Korollar 1.1.10 *Sei* $A \in \mathbb{R}_\infty^{n \times n}$*. Wir nehmen an, dass in* $G(A)$ *kein Zykel mit negativem Preis existiert. Dann gilt für alle* $r \geq n$*:* $I \oplus A \oplus A^{\odot 2} \oplus \ldots \oplus A^r = I \oplus A \oplus A^{\odot 2} \oplus \ldots \oplus A^{n-1}$.

Definition 1.1.11 *Ist* $A \in \mathbb{R}_\infty^{n \times n}$*, so setzen wir* $A^* := I \oplus A \oplus A^{\odot 2} \oplus \ldots \oplus A^{\odot (n-1)}$ *und* $A^+ := A \oplus A^{\odot 2} \oplus \ldots \oplus A^{\odot n}$.

Definition 1.1.12 *Eine tropische Matrix* A *heißt* ***irreduzibel****, wenn ihr Graph* $G(A)$ *stark zusammenhängend ist.*

1.2 Tropische Eigenvektoren und Eigenwerte

Definition 1.2.1 *Seien $A \in \mathbb{R}_\infty^{n\times n}$, $v \in \mathbb{R}_\infty^n \setminus \{(\infty,\ldots,\infty)\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}_\infty$. Falls*

$$A \odot v = \lambda \odot v$$

*gilt, nennt man v einen **tropischen Eigenvektor** von A und λ einen **tropischen Eigenwert** von A.*

Definition 1.2.2 *Der **normalisierte Preis** eines Zykels $Z = (p_0, p_1, \ldots, p_n = p_0)$ (in einem gewichteten Graph) ist $\mathrm{NP}(Z) = \frac{1}{n}\,\mathrm{Preis}(Z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f((p_{i-1}, p_i))$.*

Lemma 1.2.3 *Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}_\infty^{n\times n}$, so existiert in $G(A)$ ein Zykel mit normalisiertem Preis λ.*

Definition 1.2.4 *Der **Träger** eines tropischen Vektors $v = (v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}_\infty^n$ ist $\operatorname{supp} v := \{i \leq n \mid v_i \neq \infty\}$.*

Satz 1.2.5 *Sei $v \in \mathbb{R}_\infty^n$ ein Eigenvektor von $A \in \mathbb{R}_\infty^{n\times n}$. Dann ist der zugehörige Eigenwert gleich dem Minimum der normalisierten Zykelpreise der Zykel, die in $\operatorname{supp} v$ liegen. Wenn gar kein Zykel in $\operatorname{supp} v$ liegt, ist der Eigenwert ∞.*

Lemma 1.2.6 *Jede tropische Matrix $A \in \mathbb{R}_\infty^{n\times n}$ besitzt mindestens einen Eigenwert. Der kleinste Eigenwert ist gleich dem Minimum der normalisierten Preise aller Zykel in $G(A)$. Existiert in $G(A)$ gar keine Zykel, so ist der kleinste (und einzige) Eigenwert ∞.*

Definition 1.2.7 *Den kleinsten Eigenwert von $A \in \mathbb{R}_\infty^{n\times n}$ bezeichnen wir mit $\lambda(A)$.*

Definition 1.2.8 *Sei (V, E) ein gerichteter Graph und $p \in V$. Die **starke Zusammenhangskomponente** von p ist die Menge der $p' \in V$, so dass es sowohl einen Weg von p nach p' gibt als auch umgekehrt.*

Lemma 1.2.9 *Die Menge der starken Zusammenhangskomponenten (von Punkten in V) bildet eine Partition von V.*

Lemma 1.2.10 *Ist v ein Eigenvektor von $A \in \mathbb{R}_\infty^{n\times n}$ und $I \subset \{1,\ldots,n\}$ eine starke Zusammenhangskomponente von $G(A)$ mit $I \cap \operatorname{supp} v \neq \emptyset$, so ist $I \subset \operatorname{supp} v$.*

Lemma 1.2.11 *Sind Z_1 und Z_2 Zykel der Längen n_1 und n_2, so gilt $\frac{\mathrm{Preis}(Z_1)+\mathrm{Preis}(Z_2)}{n_1+n_2} \geq \min\{\mathrm{NP}(Z_1), \mathrm{NP}(Z_2)\}$.*

Satz 1.2.12 *Ist $A \in \mathbb{R}_\infty^{n\times n}$ irreduzibel, so hat A genau einen tropischen Eigenwert $\lambda(A)$, nämlich das Minimum der normalisierten Preise aller Zykel in $G(A)$. Ist $n > 1$, so ist $\lambda(A) \neq \infty$.*

Satz 1.2.13 *Ist λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}_\infty^{n\times n}$, so existiert eine starke Zusammenhangskomponente I von $G(A)$, so dass λ das Minimum der normalisierten Preise aller Zykel in I ist.*

Lemma 1.2.14 *Ist $A \in \mathbb{R}_\infty^{n\times n}$ nicht irreduzibel, so hat A nach Permutation der Koordinaten die Form $\begin{pmatrix} B & \infty \\ C & D \end{pmatrix}$, wobei B und D quadratische Matrizen sind.*

Korollar 1.2.15 *Sind $I_1, \dots, I_k$ die starken Zusammenhangskomponenten von $G(A)$, hat A nach Permutation der Koordinaten die Form*

$$\begin{pmatrix} * & \infty & \dots & \infty \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \infty \\ * & \dots & * & * \end{pmatrix},$$

wobei die "∞" und "$*$" Blöcke sind und die Unterteilung in Blöcke den starken Zusammenhangskomponenten entsprechen.

1.3 Tropische Polynome

Notation 1.3.1 *Im Folgenden verwenden wir Multiindexnotation: Für $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_\infty^n$ und $\underline{i} = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ ist $\underline{x}^{\odot \underline{i}} := x_1^{\odot i_1} \odot \dots \odot x_n^{\odot i_n}$.*

Definition 1.3.2 *Ein **tropisches Polynom** in $x_1, \dots, x_n$ ist eine formale Summe der Form*

$$\bigoplus_{\underline{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{i}} \odot \underline{x}^{\odot \underline{i}}$$

für $a_{\underline{i}} \in \mathbb{R}_\infty$, wobei nur endlich viele $a_{\underline{i}} \neq \infty$ sind. Die Menge der tropischen Polynome in $x_1, \dots, x_n$ wird mit $\mathbb{R}_\infty[x_1, \dots, x_n]$ bezeichnet.

Bemerkung 1.3.3 *Jedes tropische Polynom $f \in \mathbb{R}_\infty[x_1, \dots, x_n]$ definiert eine **tropische Polynomfunktion**: $\mathbb{R}_\infty^n \to \mathbb{R}_\infty, \underline{b} \mapsto f(\underline{b})$. Verschiedene Polynome können die gleiche Funktion definieren. In dieser Vorlesung interessieren wir uns (fast?) nur für die Polynomfunktionen.*

Bemerkung 1.3.4 *Tropische Polynomfunktionen sind stetig und stückweise linear. Genauer: Ist f eine tropische Polynomfunktion in n Variablen, so existiert eine Zerlegung von $\mathbb{R}_\infty^n$ in endlich viele Mengen A_i, so dass die Einschränkung $f|_{A_i}$ die Form $f(x_1, \dots, x_n) = a_i + r_{i,1}x_1 + \dots r_{i,n}x_n$ hat, für gewisse $a_i \in \mathbb{R}_\infty$ und $r_{i,j} \in \mathbb{N}$. (Hierbei verwenden wir die Konvention $0 \cdot \infty = 0$.)*

Definition 1.3.5 *Sei*

$$f = \bigoplus_{\underline{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{i}} \odot \underline{x}^{\odot \underline{i}}$$

*ein tropisches Polynom. Ein Tupel $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_\infty^n$ heißt **Wurzel** von f, wenn $f(\underline{b}) = \infty$ ist oder wenn für mehrere verschiedene Indizes $\underline{i}$ gilt:*

$$f(\underline{b}) = a_{\underline{i}} \odot \underline{b}^{\odot \underline{i}}.$$

Die Menge der Wurzeln von f wird mit $V(f)$ bezeichnet.

Satz 1.3.6 *Jede tropische Polynomfunktion $f(x)$ (in einer Variablen), die nicht konstant ∞ ist, lässt sich auf eindeutige Art schreiben in der Form*

$$f(x) = c \odot \bigodot_{i=1}^{n} (x \oplus b_i)$$

für gewisse $b_i \in \mathbb{R}_\infty$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Menge $\{b_1, \ldots, b_n\}$ ist genau die Menge der Wurzeln von f. (Achtung: Dies ist i. A. nur eine Gleichung von Polynomfunktionen, nicht von Polynomen.)

Nachtrag: Die **Vielfachheit** einer Wurzel b von f ist die Anzahl der Faktoren $x \oplus b$ in der obigen Produktdarstellung von f.

Lemma 1.3.7 *Die kleinste Wurzel von*

$$f(x) = x^{\odot n} \oplus \bigoplus_{i=0}^{n-1} a_i \odot x^{\odot i}$$

ist $\min\{a_{n-1}, a_{n-2}/2, \ldots, a_0/n\}$.

1.4 Die tropische Determinante und das tropische charakteristische Polynom

Definition 1.4.1 *Sei $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}_\infty^{n \times n}$.*

(a) *Die **tropische Determinante** von A is definiert als*

$$\det(A) := \bigoplus_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \odot \ldots \odot a_{n\sigma(n)}.$$

(b) *Das **tropische charakteristische Polynom** von A ist*

$$\chi_A(x) = \det(A \oplus x \odot I).$$

Satz 1.4.2 *Sei $A \in \mathbb{R}_\infty^{n \times n}$ und seien $A_1, \ldots, A_\ell$ die Submatrizen, die den starken Zusammenhangskomponenten von $G(A)$ entsprechen. Dann gilt:*

(a) $\det A = \det A_1 \odot \ldots \odot \det A_\ell$.
(b) $\chi_A(x) = \chi_{A_1}(x) \odot \ldots \odot \chi_{A_\ell}(x)$.

Satz 1.4.3 *Sei $A \in \mathbb{R}_\infty^{n \times n}$. Dann gilt:*

(a) *Jeder Eigenwert von A ist eine Wurzel von $\chi_A(x)$.*
(b) *$\lambda(A)$ ist die kleinste Wurzel von $\chi_A(x)$.*

Bemerkung 1.4.4 *Im Allgemeinen ist nicht jede Nullstelle des charakteristischen Polynoms ein Eigenwert.*

2 Tropische Algebra

2.1 Tropikalisierung

Definition 2.1.1 *Für den Rest der Vorlesung sei $\mathbb{K}$ die Menge der formalen Potenzreihen der Form $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n \varepsilon^{r_n}$, für Elemente $z_n \in \mathbb{C}$ und $r_n \in \mathbb{R}$ mit* $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ *und $r_0 < r_1 < r_2 < \dots$. Wir definieren auf K eine Addition und Multiplikation so, wie es die Notation suggeriert.*

Lemma 2.1.2 *Diese Addition und Multiplikation sind wohldefiniert, und $\mathbb{K}$ ist damit ein Ring.*

Definition 2.1.3 *Ist $a = \sum_{n\in\mathbb{N}} z_n \varepsilon^{r_n} \in \mathbb{K}^\times$ mit $z_0 \neq 0$, so definieren wir die **Bewertung** von a als $v(a) := r_0$. Außerdem setzen wir $v(0) := \infty$.*

Lemma 2.1.4 *Für $a, b \in \mathbb{K}$ gilt:*

(a) *$v(a+b) \geq v(a) \oplus v(b)$, und falls $v(a) \neq v(b)$ ist, gilt sogar $v(a+b) = v(a) \oplus v(b)$.*
(b) *$v(a \cdot b) = v(a) \odot v(b)$*

Definition 2.1.5 *Der **Bewertungsring** von $\mathbb{K}$ ist $\mathcal{O}_\mathbb{K} := \{a \in \mathbb{K} \mid v(a) \geq 0\}$. Für $a = z_0 + \sum_{n\geq 1} z_n \varepsilon^{r_n} \in \mathcal{O}_\mathbb{K}$ definieren wir die **Restklasse** von a als* $\operatorname{res}(a) := z_0$.

Satz 2.1.6 *Die Menge $\mathcal{O}_\mathbb{K}$ ist ein Ring, und die Abbildung* $\operatorname{res}\colon \mathcal{O}_\mathbb{K} \to \mathbb{C}$ *ist ein Ringhomomorphismus.*

Definition 2.1.7 *Für $f = \sum_{\underline{i}\in\mathbb{N}^n} a_{\underline{i}} \underline{x}^{\underline{i}} \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ definieren wir die **Tropikalisierung** als*

$$\operatorname{trop} f := \bigoplus_{\underline{i}\in\mathbb{N}^n} v(a_{\underline{i}}) \odot \underline{x}^{\odot \underline{i}} \in \mathbb{R}_\infty[x_1, \dots, x_n].$$

Satz 2.1.8 *Ist $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ eine Nullstelle von $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, so ist $v(\underline{b}) := (v(b_1), \dots, v(b_n))$ eine Wurzel von* $\operatorname{trop} f$.

Lemma 2.1.9 *Seien $a_i \in \mathbb{K}$ (für $i \in \mathbb{N}$). Dann sind äquivalent:*

(a) $\lim_{i\to\infty} v(a_i) = \infty$
(b) *Die Summe $\sum_{i=0}^\infty a_i$ konvergiert in $\mathbb{K}$, d. h. es existiert ein $b \in \mathbb{K}$ so, dass* $\lim_{n\to\infty} v(b - \sum_{i=0}^n a_i) = \infty$.

Definition 2.1.10 *Ist $f \in \mathbb{K}[x] \setminus \mathbb{K}$, so schreiben wir im Folgenden $\beta(f)$ für die größte Wurzel von* $\operatorname{trop} f$ *und $k(f)$ für deren Multiplizität.*

Satz 2.1.11 *Sei $f \in \mathbb{K}[x] \setminus \mathbb{K}$. Dann existiert eine Nullstelle b von f mit $v(b) = \beta(f)$. Insbesondere ist $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.*

Korollar 2.1.12 $\mathbb{K}$ *ist ein Körper.*

Korollar 2.1.13 $\mathbb{K}$ *ist algebraisch abgeschlossen.*

Korollar 2.1.14 *„Die Nullstellen eines Polynoms entsprechen genau den Nullstellen der Tropikalisierung". Genauer: Ist* $f = a \cdot \prod_i (x - b_i) \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$ *(für* $a \in \mathbb{K}^\times$ *und* $b_i \in \mathbb{K}$*), so ist* $\operatorname{trop} f = v(a) \odot \bigodot_i (x \oplus v(b_i))$.

Lemma 2.1.15 (Hensels Lemma) *Seien* $f \in \mathcal{O}_\mathbb{K}[x]$ *und* $a \in \mathcal{O}_\mathbb{K}$ *so,* $v(f'(a)) = 0$ *und* $\lambda := v(f(a)) > 0$ *ist. Dann existiert eine Nullstelle* $b \in \mathcal{O}_\mathbb{K}$ *von* f *mit* $v(b - a) \geq \lambda$.

Bemerkung 2.1.16 *Sei* $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$*, seien* $\lambda, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$*, und sei* $g(\underline{x}) := \varepsilon^\lambda f(\varepsilon^{\mu_1} x_1, \dots, \varepsilon^{\mu_n} x_n)$*. Dann gilt:*

(a) $(\operatorname{trop} g)(\underline{\beta}) = \lambda + (\operatorname{trop} f)(\underline{\beta} + \underline{\mu})$.

(b) $\underline{\beta} \in \mathbb{R}^n_\infty$ *ist eine Wurzel von* $\operatorname{trop} g$ *genau dann, wenn* $\underline{\beta} + \underline{\mu}$ *eine Wurzel von* $\operatorname{trop} f$ *ist (und im Fall* $n = 1$ *haben die Wurzeln die gleiche Vielfachheit).*

(c) *Lässt sich eine Wurzel* $\underline{\beta}$ *von* $\operatorname{trop} g$ *zu einer Nullstelle* $\underline{b}$ *von* g *liften, so lässt sich auch die Wurzel* $\underline{\beta} + \underline{\mu}$ *von* $\operatorname{trop} f$ *zu einer Nullstelle von* f *liften, nämlich zu* $\underline{a} := (\varepsilon^{\mu_1} b_1, \dots, \varepsilon^{\mu_n} b_n)$.

Lemma 2.1.17 *Sei* $f = \sum a_i x^i \in \mathbb{K}[x]$ *mit* $(\operatorname{trop} f)(0) = \min_i v(a_i) = 0$*. Dann gilt:*

(a) *Die Anzahl der Wurzeln* α *von* $\operatorname{trop} f$ *(mit Vielfachheit gezählt) mit* $\alpha > 0$ *ist* $\min\{i \mid v(a_i) = 0\}$

(b) *Die Anzahl der Wurzeln* α *von* $\operatorname{trop} f$ *(mit Vielfachheit gezählt) mit* $\alpha \geq 0$ *ist* $\max\{i \mid v(a_i) = 0\}$.

2.2 Varietäten

Bemerkung: In diesem Abschnitt kann $\mathbb{K}$ ein beliebiger algebraisch abgeschlossener Körper sein (also z. B. auch $\mathbb{C}$).

Definition 2.2.1 *Sei* R *ein kommutativer Ring mit* 1*. Ein Ideal* $I \subset R$ *ist ein* ***Radikalideal****, wenn für alle* $f \in R$ *gilt: Existiert ein* $n \geq 1$ *so, dass* $f^n \in I$ *ist, so ist bereits* $f \in I$*. Das von einer Menge* $A \subset R$ ***erzeugte Radikalideal*** *ist das kleinste Radikalideal, das* A *enthält; Notation dafür:* $\sqrt{(A)}$.

Definition 2.2.2 *Sei* $A \subset \mathbb{K}[\underline{x}]$ *eine Menge von Polynomen. Die von* A *definierte* ***Varietät*** *(auch:* ***algebraische Menge****) ist* $V(A) := \{\underline{a} \in \mathbb{K}^n \mid \forall f \in A\colon f(\underline{a}) = 0\}$.

Definition 2.2.3 *Sei* $X \subset \mathbb{K}^n$ *beliebig. Der* ***Zariski-Abschluss*** *von* X *ist die kleinte Varietät* $V \subset \mathbb{K}^n$*, die* X *enthält. Wir schreiben* X^{Zar} *dafür.*

Bemerkung 2.2.4 *Es gilt:* $X^{\mathrm{Zar}} = V(I(X))$*, wobei* $I(X) := \{f \in \mathbb{K}[\underline{x}] \mid \forall \underline{a} \in X\colon f(\underline{a}) = 0\}$.

Bemerkung 2.2.5 (a) *Für* $X \subset \mathbb{K}^n$ *beliebig ist* $I(X)$ *ein Radikalideal.*

(b) *Ist $A \subset \mathbb{K}[\underline{x}]$ und I das von A erzeugte Radikalideal, so ist $V(A) = V(I)$.*
(c) *Die Abbildung $\{$Radikalideale in $\mathbb{K}[\underline{x}]\} \to \{$Varietäten in $\mathbb{K}^n\}, I \mapsto V(I)$ ist eine Bijektion. Die Umkehrabbildung ist $V \mapsto I(V)$.*

Bemerkung 2.2.6 *In $\mathbb{K}[\underline{x}]$ sind alle Ideale endlich erzeugt. Insbesondere lässt sich jede Varietät schreiben als $V(f_1, \dots, f_k)$, für (endlich viele) Polynome $f_i \in \mathbb{K}[\underline{x}]$.*

Definition 2.2.7 *Die **Dimension** $\dim V$ einer Varietät $V \subset \mathbb{K}^n$ ist das größte d, so dass eine lineare Abbildung $\phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^d$ existiert mit $(\phi(V))^{\mathrm{Zar}} = \mathbb{K}^d$.*

Bemerkung 2.2.8 *Für die Dimension einer Varietät $V \subset \mathbb{K}^n$ gilt:*

(a) $\dim V = 0$ *genau dann, wenn V eine endliche Menge ist.*
(b) $\dim V = n$ *genau dann, wenn $V = \mathbb{K}^n$.*
(c) *Ist $V = V(f)$ ist für ein $f \in \mathbb{K}[\underline{x}] \setminus \mathbb{K}$, so ist $\dim V = n - 1$. In diesem Fall nennt man V eine **Hyperfläche**.*

Definition 2.2.9 *Eine Varietät V heißt **reduzibel**, wenn Varietäten $V_1, V_2 \subsetneq V$ existieren mit $V_1 \cup V_2 = V$; sonst heißt V **irreduzibel**.*

Bemerkung 2.2.10 *Ist $V \subset \mathbb{K}^n$ irreduzibel und von Dimension $n - 1$, so ist V eine Hyperfläche.*

Satz 2.2.11 *Sei $V \subset \mathbb{K}^n$ und sei $\underline{g}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine polynomiale Abbildung, d. h. $\underline{g} = (g_1, \dots, g_m) \in \mathbb{K}[\underline{x}]$. Dann gilt:*

(a) $\dim(f(V))^{\mathrm{Zar}} \leq \dim V$
(b) *Ist V irreduzibel, so ist auch $(f(V))^{\mathrm{Zar}}$ irreduzibel.*

Lemma 2.2.12 *Sind $B_1, \dots, B_n \subset \mathbb{K}$ unendlich und $B := B_1 \times \cdots \times B_n \subset \mathbb{K}^n$, so ist $B^{\mathrm{Zar}} = \mathbb{K}^n$.*

2.3 Tropische Varietäten

Ab jetzt sei $\mathbb{K}$ wieder wie in Abschnitt 2.1.

Definition 2.3.1 *Sei $V \subset \mathbb{K}^n$ eine Varietät und $I := I(V)$. Wir definieren die Tropikalisierung von V als $\operatorname{trop} V := \bigcap_{f \in I} V(\operatorname{trop} f)$. Eine Menge dieser Form nennt man **tropische Varietät**.*

Bemerkung 2.3.2 *Aus Satz 2.1.8 folgt, für Varietäten V: $\{v(\underline{a}) \mid \underline{a} \in V\} \subset \operatorname{trop} V$.*

Satz 2.3.3 (Fundamentalsatz der tropischen Geometrie) *Für Varietäten $V \subset \mathbb{K}^n$ gilt: $\{v(\underline{a}) \mid \underline{a} \in V\} = \operatorname{trop} V$.*

Satz 2.3.4 (Existenz von tropischen Basen) *Sei $V \subset \mathbb{K}^n$ eine Varietät. Dann existieren endlich viele $f_i \in I(V)$, die $\operatorname{trop} V$ definieren, d. h. so dass $\operatorname{trop} V := \bigcap_i V(f_i)$. (Wenn die f_i außerdem das Ideal $I(V)$ definieren, nennt man sie eine **tropische Basis** von $I(V)$.)*

Definition 2.3.5 (a) *Eine nicht-leere Teilmenge $P \subset \mathbb{R}_\infty^n$ heißt **rationaler Polyeder**, wenn P sich schreiben lässt als Schnitt von endlich vielen Mengen der Form $\{\underline{x} \mid r_1x_1 + \cdots + r_nx_n \geq a\}$, für $r_i \in \mathbb{Q}$ und $a \in \mathbb{R}_\infty$. Hierbei verwenden wir die Konvention, dass die Ungleichung immer gilt, wenn ein i existiert mit $r_i > 0$ und $x_i = \infty$.*

(b) *Die **Dimension** $\dim P$ ist die kleinste Dimension eines Untervektorraums $V \subset \mathbb{R}^n$, so dass $P \subset V + b$ ist für ein $b \in \mathbb{R}_\infty^n$.*

Satz 2.3.6 (Bieri-Groves) *Ist V eine irreduzible d-dimensionale Varietät, so ist $\operatorname{trop} V$ eine endliche Vereinigung von d-dimensionalen rationalen Polyedern.*

2.4 Beweise für Hyperflächen

In diesem Abschnitt sei $f \in \mathbb{K}[\underline{x}]$.

Lemma 2.4.1 (2.3.4 für tropische Hyperflächen) *Für $f \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ gilt: $\operatorname{trop}(V(f)) = V(\operatorname{trop} f)$.*

Satz 2.4.2 *Für jedes tropische Polynom $f \in \mathbb{R}_\infty[x_1, \dots, x_n]$ ist die Wurzelmenge $V(f)$ eine Vereinigung von endlich vielen $(n-1)$-dimensionalen Polyedern.*

Satz 2.4.3 (2.3.3 für tropische Hyperflächen) *$V(f) = \{v(\underline{a}) \mid \underline{a} \in V(f)\}$.*

Satz 2.4.4 *Sei $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \setminus \mathbb{K}$ ein Polynom, sei $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}_\infty^n$ eine Wurzel von $\operatorname{trop} f$, und sei $A := \{\underline{a} \in V(f) \mid v(\underline{a}) = \underline{\alpha}\}$. Dann ist $\dim A^{\mathrm{Zar}} = n - 1$. Ist $V(f)$ irreduzibel, so ist sogar $A^{\mathrm{Zar}} = V$.*

2.5 Beweise im Allgemeinen

In diesem gesamten Abschnitt seien n und d fest, und $V \subset \mathbb{K}^n$ sei eine d-dimensionale Varietät. Außerdem wird A immer eine Matrix in $\mathbb{N}^{(d+1)\times n}$ sein.

Definition 2.5.1 *Die zu A zugehörige **monomiale Abbildung** ist*

$$\mu_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{d+1}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^{a_{11}} \cdots x_n^{a_{1n}}, \dots, x_1^{a_{d+1,1}} \cdots x_n^{a_{d+1,n}})$$

Bemerkung 2.5.2 *Für $\underline{x} \in \mathbb{K}^n$ gilt: $v(\mu_A(\underline{x})) = Av(\underline{x})$.*

Definition 2.5.3 *Wir nennen eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathbb{N}^{(d+1)\times n}$ **generisch**, wenn endlich viele Untervektorräume $U_i \subset \mathbb{K}^n$ existieren mit $\dim U_i \leq d + 1$, so dass für alle $A \in \mathbb{N}^{(d+1)\times n} \setminus \mathcal{M}$ gilt: $\ker A \cap U_i \neq \{0\}$ für ein i.*

Bemerkung 2.5.4 *Generische Teilmengen von $\mathbb{N}^{(d+1)\times n}$ sind nicht leer, und der Schnitt von generischen Teilmengen von $\mathbb{N}^{(d+1)\times n}$ ist wieder generisch.*

Proposition 2.5.5 *Die Menge der $A \in \mathbb{N}^{(d+1)\times n}$ mit $\dim(\mu_A(V)^{\mathrm{Zar}}) = d$ generisch.*

Bemerkung 2.5.6 *Ist V irreduzibel, so ist $\mu_A(V)^{\mathrm{Zar}}$ auch irreduzibel und damit, falls $\dim(\mu_A(V)^{\mathrm{Zar}}) = d$ ist, insbesondere eine Hyperfläche.*

Lemma 2.5.7 *Sei $W := \mu_A(V)^{\mathrm{Zar}}$. Wir nehmen an, dass $\dim(W) = d$ ist. Dann ist $A(\operatorname{trop} V) = \operatorname{trop} W$.*

Definition 2.5.8 *Wir nennen eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n_\infty$ gut, wenn sie Vereinigung von endlich vielen d-dimensionalen Polyedern ist.*

Lemma 2.5.9 *Ist $S \subset \mathbb{R}^n_\infty$ gut und $p \in S$, so existiert eine generische Menge $\mathcal{M} \subset \mathbb{N}^{(d+1)\times n}$, so dass für alle $A \in \mathcal{M}$ das Urbild von Ap in S nur aus p besteht. Besser: Es existieren sogar endlich viele A_i, so dass für jedes $p \in S$ eins dieser A_i genommen werden kann.*

Lemma 2.5.10 *Sei $S \subset \mathbb{R}^n_\infty$ so, dass $A(S) \subset \mathbb{R}^{d+1}_\infty$ gut ist für alle A aus einer generischen Menge $\mathcal{M} \subset \mathbb{N}^{(d+1)\times n}$. Dann ist auch S gut, und es existieren endlich viele $A_i \in \mathcal{M}$, so dass*

$$S = \bigcap_i A_i^{-1}(A(S))$$

gilt.

Index

algebraische Menge, 8

Bewertung, 7
Bewertungsring, 7

Dimension, 9

erzeugtes Radikalideal, 8

Fundamentalsatz der tropischen Geometrie, 9

generisch, 10
gewichtete Länge, 3
gewichteter Graph, 3
Graph, 3

Hyperfläche, 9

irreduzibel, 3, 9

Länge, 3

monomiale Abbildung, 10

normalisierter Preis, 4

Polyeder
  rationaler, 10
Preis, 3
  normalisierter, 4

Radikalideal, 8
rationaler Polyeder, 10
reduzibel, 9
Restklasse, 7

stark zusammenhängend, 3
starke Zusammenhangskomponente, 4

Tropikalisierung, 7
tropische Addition, 2
tropische Basis, 9
tropische charakteristische Polynom, 6
tropische Determinante, 6
tropische Einheitsmatrix, 2
tropische Matrix, 2
tropische Matrizenmultiplikation, 2
tropische Multiplikation, 2
tropische Polynomfunktion, 5
tropische Varietät, 9
tropischer Eigenvektor, 4
tropischer Eigenwert, 4
tropischer Vektor, 2
tropisches Polynom, 5
Träger, 4

Varietät, 8
Vielfachheit, 6

Weg, 3
Wurzel, 5

Zariski-Abschluss, 8
Zykel, 3