Vorkurs: Mathematische Grundlagen

Rüdiger W. Braun

Wintersemester 2020/21

Inhaltsverzeichnis

Literatur

Literatur zum Vorkurs

Schichl, Steinbauer: Einführung in das Mathematische Arbeiten Liegt dem Vorkurs zugrunde

Im Netz der HHU als e-Book verfügbar unter https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-662-56806-4

Beutelspacher: Das ist o.B.d.A. trivial Beschäftigt sich hauptsächlich mit der mathematischen Sprache

Im Netz der HHU als e-Book verfügbar unter https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-322-91549-8

Richter: Mathematisches Vorsemester Sehr ausführlicher Text von 1977.

Halmos: Naive Mengenlehre

Literatur zur Analysis I

Forster: Analysis 1

Kaballo: Einführung in die Analysis I

Literatur zur Linearen Algebra I

Bosch: Lineare Algebra

Fischer: Lineare Algebra

Beachten Sie die Anweisungen zum Aufbau eines VPN-Tunnels auf https://www.zim.hhu.de/a-z/a-z-detail.html?azitem=293

1 Logik

1.1 Schaltalgebra

1.1.1 Verknüpfungen

Die *"und"-Verknüpfung (Konjunktion)* ist eine Abbildung $\wedge\colon \{0,1\}\times\{0,1\}\to\{0,1\}$ mit der durch die folgende *Schaltwerttafel* gegebenen Zuordnungsvorschrift.

Schaltwerttafel anschreiben, Realisierung als Reihenschaltung.

Die *"oder"-Verknüpfung (Disjunktion)* ist eine Abbildung $\vee\colon \{0,1\}\times\{0,1\}\to\{0,1\}$ mit der durch die folgende Schaltwerttafel gegebenen Zuordnungsvorschrift.

Schaltwerttafel anschreiben, Realisierung als Parallelschaltung.

Die *Verneinung (Negation)* ist eine Abbildung $\neg\colon \{0,1\}\to\{0,1\}$ mit der durch die folgende Schaltwerttafel gegebenen Zuordnungsvorschrift.

Schaltwerttafel anschreiben.

Aus diesen drei Verknüpfungen können alle Abbildungen $\{0,1\}\times\{0,1\}\to\{0,1\}$ zusammengesetzt werden. Beispielsweise können wir setzen $a\veebar b := (a\wedge\neg b)\vee(\neg a\wedge b)$. Die Schaltwerttabelle zeigt, dass $\veebar$ die Verknüpfung "entweder oder" ist.

1.1.2 Assoziativgesetz

a, b und c seien Variablen, die einen Wert in $\{0,1\}$ bezeichnen. Dann gilt das Assoziativgesetz der Disjunktion

$$(a\vee b)\vee c = a\vee(b\vee c).$$

Man überzeugt sich durch Aufstellen der Schaltwerttabelle von seiner Richtigkeit.

1.1.3 Rechenregeln

Kommutativgesetze

$$a\vee b = b\vee a, \qquad a\wedge b = b\wedge a.$$

Assoziativgesetze

$$(a\vee b)\vee c = a\vee(b\vee c), \quad (a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c).$$

Distributivgesetze

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Verschmelzungsgesetze

$$a \vee (b \wedge a) = a, \quad a \wedge (b \vee a) = a.$$

Idempotenzgesetze

$$a \wedge a = a, \quad a \vee a = a.$$

Neutralitätsgesetze

$$a \wedge 1 = a, a \vee 0 = a.$$

Absorptionsgesetze

$$a \wedge 0 = 0, \quad a \vee 1 = 1.$$

Komplementaritätsgesetze

$$a \wedge \neg a = 0, \quad a \vee \neg a = 1.$$

Doppelnegationsgesetz

$$\neg(\neg a) = a$$

Gesetze von De Morgan

Bestimmen Sie die Schaltwerttabelle

$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b, \quad \neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b.$$

Alle Gesetze können durch Aufstellen der jeweiligen Schaltwerttabellen gezeigt werden. In Abschnitt 1.2.2 werden wir diese Schreibweise noch weiter präzisieren.

Alle diese Gesetze haben Analoga in der Mengenlehre. Dort können wir sie mit Venn-Diagrammen veranschaulichen.

1.1.4 Implikation und Äquivalenz

Überlegen Sie sich die Negation von $a \Leftrightarrow b$

Zwei wichtige Verknüpfungen sind die *Implikation* $a \Rightarrow b := \neg a \vee b$ und die *Äquivalenz* $a \Leftrightarrow b := (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$. Wir betrachten die Schaltwerttabellen.

Die Verneinung von $a \Rightarrow b$ ist $a \wedge \neg b$. Das rechnen wir mit den DeMorgan Regeln und der Schaltwerttabelle nach.

1.1.5 Boolesche Algebra

Eine mathematische Struktur mit 0 und 1 und drei Verknüpfungen $\wedge$, $\vee$ und $\neg$, heißt *Boolesche Algebra,* wenn sie die Kommutativgesetze, die Distributivgesetze, die Neutralitatsgesetze und die Komplementaritätsgesetze erfüllt.

1.1 Satz. *In einer Booleschen Algebra ist 0 das einzige Element, für welches $a \vee 0 = a$ für alle a gilt.*

In der Schaltalgebra gibt es nur zwei Elemente. Daher ist die Aussage dort klar. In einer beliebigen Booleschen Algebra muss man anders argumentieren.

Beweis. Es sei n ein Element mit $a \vee n = a$ für alle a. Dann

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \vee n \\ &= n \vee 0 \\ &= n, \end{aligned}$$

wobei wir in der ersten Zeile die Voraussetzung an n, in der zweiten ein Kommutativitätsgesetz und in der dritten ein Neutralitatsgesetz benutzt haben. □

1.2 Logik und Aussagen

Eine *Aussage* ist entweder wahr oder falsch.

Beispiele

- Heute ist Montag. (Wahre Aussage)
- $18 \leq 7$. (Falsche Aussage)
- $18 = 11 + 7$. (Wahre Aussage)
- Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, lässt sich als Summe von zwei Primzahlen schreiben. (Aussage, deren Wahrheitswert im Augenblick unbekannt ist.) (Goldbach-Vermutung)
- $11 + 7$. (Keine Aussage)
- Haben Sie schon zu Mittag gegessen? (Keine Aussage)

Durch Verknüpfung von Aussagen mit “und” oder mit “oder” und durch Negation entstehen neue Aussagen. Bei der “oder”-Verknüpfung ist darauf zu achten, dass $a \vee b$ auch dann wahr ist, wenn beide wahr sind.

Beispiele zur Verneinung:

- Die Verneinung von "In diesem Raum sind vier Tafeln und direkt vor der Tafel hängen Neonröhren" ist "Die Anzahl der Tafeln in diesem Raum ist ungleich vier oder es hängen keine Neonröhren direkt vor der Tafel".

  Beispiel: "Findet der Vorkurs Informatik im selben Raum statt?" "Nein. Es gibt keine Neonröhren direkt vor der Tafel."

- Die Verneinung der Goldbach-Vermutung ist: "Es gibt mindestens eine gerade Zahl, die größer als 2 ist und sich nicht als Summe zweier Primzahlen schreiben lässt."

  Solche Probleme thematisieren wir in Abschnitt 1.2.4.

Doppelte Verneinungen fallen weg.

- Es ist nicht wahr, dass ich letzte Woche nicht im Dienst war.

1.2.1 Prädikate

Folgendes ist keine Aussage

- n ist Summe zweier Primzahlen.

Solche ein Satz kann auf mehrere Weisen zu einer Aussage werden:

(a) Durch Einsetzen einer konkreten Zahl:

Beispiel: Es sei $n = 2^7$. Dann ist n die Summe zweier Primzahlen. (Wahre Aussage)

(b) Man kann aus dem Satz eine allgemeingültige Aussage machen, indem man ihn für alle n aus einer Menge ausspricht.

Beispiel: Jede gerade Zahl größer als 2 ist Summe zweier Primzahlen. (Der Wahrheitswert dieser Aussage ist unbekannt.)

(c) Man kann aus dem Satz eine Aussage über die Existenz eines Beispiels machen.

Beispiels: Es gibt eine gerade Zahl n, welche Summe zweier Primzahlen ist. (Wahre Aussage)

Ein *Prädikat* ist eine Formulierung, die freie Variablen enthält und durch Einsetzen konkreter Werte für diese Variablen zu einer Aussage wird.

Beispiel eines Prädikats mit drei freien Variablen

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c. \tag{1.1}$$

1.2.2 Quantoren

Das Assoziativgesetz für die Disjunktion sagt aus, dass das Prädikat (1.1) für alle Werte $a, b, c \in \{0, 1\}$ zutrifft.

In formaler Schreibweise verwendet man den *Allquantor* $\forall$

$$\forall a \in \{0,1\} \forall b \in \{0,1\} \forall c \in \{0,1\} : a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c. \tag{1.2}$$

Alle freien Variablen werden durch Quantoren gebunden, daher ist (1.2) eine Aussage.

Die Schreibweise mit den Allquantoren wird in der mathematischen Literatur als unelegant empfunden. Es gibt viele Möglichkeiten, Allquantoren in Prosa auszudrücken. In den folgenden Beispielen sei M eine Menge (Mengen behandeln wir auch noch)

- Für alle $a \in M$ gilt ...
- Für jedes $a \in M$ gilt ...
- Sei $m \in M$ beliebig. Dann gilt ...
- Für ein beliebiges Element aus M gilt ...
- Das Quadrat einer geraden Zahl ist gerade.
- Sei $m \in M$. Dann gilt ...
- Die Elemente von M erfüllen ...

Hat man mehrere freie Variable in einem Prädikat, so schreibt man anstelle von $\forall a \in M \, \forall b \in M\colon \ldots$ beispielsweise

- Für je zwei Elemente $a, b \in M$ gilt ...
- Für $a, b \in M$ gilt ...

Sauber ausgeschrieben lautet das Assoziativgesetz der Disjunktion also beispielsweise

- Für je drei Elemente $a, b, c \in \{0, 1\}$ gilt
$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c.$$

Will man sagen, dass wenigstens ein Element mit einer bestimmten Eigenschaft existiert, so benutzt man den *Existenzquantor* $\exists$.

Beispiele

- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2.$

- Es gibt ein reelles x mit $x^2 = 2$.
- Die Gleichung $x^2 = 2$ hat eine reelle Lösung.
- Die Gleichung $x^2 = 2$ wird von einem geeigneten $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.
- Das Quadrat von mindestens einer einstelligen Zahl ist größer als 80.

1.2.3 Verneinung von Aussagen mit Quantoren

Die Verneinung von "alle Schwäne sind weiß" ist "es gibt einen Schwan, der nicht weiß ist".

Die Verneinung einer Allaussage ist eine Existenzaussage und umgekehrt.

1.2.4 Verschiedene Quantoren in einer Aussage

Die Aussage "Zu jedem Schloss gehört ein Schlüssel" enthält ein All- und einen Existenzquator. Wenn T die Menge aller Schlösser und D die Menge aller Schlüssel bezeichnet, dann schreibt sich die Aussage so

$$\forall t \in T\, \exists d \in D : d \text{ gehört zu } t.$$

Es kommt auf die Reihenfolge an:

$$\exists d \in D\, \forall t \in T : d \text{ gehört zu } t$$

ist von zweifelhaften Wert.

Verneinung

$$\begin{aligned}\neg\left(\forall t \in T\, \exists d \in D : d \text{ gehört zu } t\right) &= \exists t \in T : \neg\left(\exists d \in D : d \text{ gehört zu } t\right)\\ &= \exists t \in T\, \forall d \in D : d \text{ gehört nicht zu } t.\end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Es gibt ein Schloss, das keinen Schlüssel hat.

Mehrere gleiche Quantoren werden zusammengefasst.

Beispiel: Eine Zahl r heißt rational, wenn es ganze Zahlen p und q gibt, so dass $r = \frac{p}{q}$. Die Aussage, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist, bedeutet also

$$\neg\left(\exists p, q \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{p}{q}\right).$$

Das ist äquivalent zu

$$\forall p, q \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} \neq \frac{p}{q}.$$

2 Definition, Satz und Beweis

2.1 Definition

Eine *Definition* vergibt einen Namen oder eine Abkürzung für ein oder mehrere Objekte.

Beispiele

- Eine natürliche Zahl a heißt *Teiler* einer natürlichen Zahl b, wenn es eine natürliche Zahl c mit $ac = b$ gibt.
- Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl > 1, die keine Teiler außer 1 und sich selbst hat.
- $h_n := \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ heißt n*-te harmonische Zahl.*

Neben diesen Definitionen von allgemein bekannten mathematischen Objekten gibt es noch Definitionen, die lokal für die Zwecke eines Arguments getroffen werden.

Jedes Objekt kann nur einmal definiert werden.

In einigen Programmiersprachen schreibt man `x:=x+1` Wie kann man diese Schreibweise hier einordnen?

2.2 Axiom

Axiome beschreiben das Regelwerk einer Struktur. Sie sind daher eigentlich auch Definitionen.

2.3 Satz

Das ist eine wahre, nicht offensichtliche Aussage. Jeder Satz besitzt einen Beweis. Auch wenn man es nicht immer sofort sieht, haben alle Sätze die Gestalt $a \Rightarrow b$. Dabei ist a die Voraussetzung und b die Behauptung.

Varianten:

Hauptsatz, Theorem Besonders wichtiger Satz

Lemma Meist Hilfssätze. Nach Personen benannte Lemmata sind dagegen in Wirklichkeit Theoreme (Bsp: Zornsches Lemma)

Korollar Direkte Folgerung aus einem anderen Satz; oft ist der Beweis so kurz, dass man ihn nicht hinschreibt

Wichtige Sätze haben Namen: Zwischenwertsatz, Satz von H. A. Schwarz

2.4 Beweis

Ein Beweis ist die Herleitung einer Aussage durch logische Schlüsse.

2.4.1 Direkter Beweis

2.1 Satz. *Das Quadrat einer geraden Zahl ist gerade.*

Beweis. Sei n gerade. Dann existiert m mit $n = 2m$. Also $n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$. □

2.4.2 Beweis durch Kontraposition

Man beachte $a \Rightarrow b = \neg a \vee b = b \vee \neg a = \neg(\neg b) \vee \neg a = \neg b \Rightarrow \neg a$.

Ein Beweis durch Kontraposition wird geführt, indem man aus der Negation der Behauptung die Negation der Voraussetzung herleitet.

2.2 Satz. *Wenn n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade.*

Beweis. Wir zeigen: Wenn n ungerade ist, dann ist n^2 ungerade. Wenn n ungerade ist, dann gibt es m mit $n = 2m + 1$. Dann $n^2 = 4m^2 + 4m + 1$. Daher ist n^2 ungerade. □

2.4.3 Beweis durch Widerspruch

Aus einer richtigen Aussage kann man nur richtige Aussagen herleiten. Gelingt es also, aus $\neg a$ eine falsche Aussage herzuleiten, so ist $\neg a$ falsch und a daher richtig.

In Formeln $\neg a \Rightarrow 0 = \neg(\neg a) \vee 0 = a \vee 0 = a$.

2.3 Satz (Euklid). *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis. Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ für ein geeignetes n. Setze $q = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$. Die Zahl q besitzt einen Primteiler r. Dieser kann aber keines der p_j sein, denn q lässt bei Division durch p_j den Rest 1. Wir haben den folgenden Widerspruch gefunden

- Die Aufzählung $p_1, \ldots, p_n$ umfasst alle Primzahlen.
- Es gibt eine von den Zahlen $p_1, \ldots, p_n$ verschiedene Primzahl.

Daher war die Annahme falsch. □

2.4.4 Falscher Beweis

Beide Beispiele sind aus Schichl, Steinbauer.

2.4 Satz (Achtung Lüge!). *In Wien gibt es in allen Häusern Ratten.*

Beweis. In Häusern, in denen es Ratten gibt, werden Rattenfallen aufgestellt. In Wien stehen in jedem Haus Rattenfallen. Also gibt es in jedem Haus Ratten. □

2.5 Satz (Achtung Lüge!). $1 = 2$

Beweis.

$$\begin{aligned} a &= b & &\cdot a \\ a^2 &= ab & &+ a^2 \\ a^2 + a^2 &= a^2 + ab & & \\ 2a^2 &= a^2 + ab & &- 2ab \\ 2a^2 - 2ab &= a^2 - ab & & \\ 2(a^2 - ab) &= 1(a^2 - ab) & & \end{aligned}$$

Also $2 = 1$. □

2.4.5 Folgerungsketten

Folgerungsketten wie in 2.4.4 werden von oben nach unten gelesen und bedeuten, dass jede Zeile aus der darüber stehenden folgt. Wenn man etwas anderes meint, muss man das durch umgekehrte Implikationspfeile oder Äquivalenzpfeile anzeigen. Besser ist es, die Folgerungskette neu zu schreiben.

2.5 Beispiel

Beispiele helfen beim Verständnis. Auch noch so viele Beispiele ersetzen aber keinen Beweis.

Ein einziges Gegenbeispiel widerlegt aber eine Vermutung.

2.6 Vermutung. *Für jede Primzahl* p *ist* $2^p - 1$ *eine Primzahl.*

Gegenbeispiel. $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89.$ □

Primzahlen von der Form $2^p - 1$ heißen Mersennesche Primzahlen.

3 Naive Mengenlehre

"Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand mehr vertreiben können." David Hilbert

"Spätere Generationen werden die Mengenlehre als Krankheit ansehen, die man überwunden hat." Henri Poincaré

3.1 Mengen

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von Objekten. Die in diesem Sinne zusammengefassten Objekte heißen *Elemente* der Menge.

Die folgenden Mengen sind "einfach da":

- Die leere Menge $\emptyset = \{\}$.
- Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Die Menge, die aus allen natürlichen Zahlen und der Null besteht, bezeichne ich mit $\mathbb{N}_0$.
- Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Sie enthält alle Brüche $\frac{p}{q}$, wobei p und q ganze Zahlen sind und $q \neq 0$ und $\frac{mp}{mq}$ mit $\frac{p}{q}$ identifiziert wird.
- Die Menge der reellen Zahlen. Ihre Beschreibung ist Inhalt der ersten Vorlesungen der Analysis I.

Man kann Mengen definieren durch

- Aufzählung ihrer Elemente innerhalb von Mengenklammern

  Beispiel: Die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung $x^2 + 2x = 0$ ist $\{-2, 0\}$
- Beschreibung durch Angabe der Eigenschaft der Elemente der Menge

  Beispiel: $P = \{m \in \mathbb{N} \mid m \neq 1$ und m hat nur die Teiler 1 und $m\}$

  Statt $\mid$ verwenden manche Autoren auch den Doppelpunkt :

Wenn x Element von M ist, dann schreibt man $x \in M$ (lies "x in M").

3.2 Teilmengen

Wenn M und N Mengen sind und jedes Element von N auch Element von M ist, dann schreibt man $N \subseteq M$. Man sagt, N sei eine *Teilmenge* von M bzw. M eine *Obermenge* von N.

Beispiel: $\emptyset \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Zwei Mengen M und N sind genau dann gleich, wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gelten, wenn sie also dieselben Elemente haben.

3.3 Mengenoperationen

Vereinigung	$M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$
Durchschnitt	$M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$
Mengendifferenz	$M \setminus N = \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$

Beispiel $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0 \setminus \{0\} = \mathbb{N}$.

Wenn eine feste Menge X gewählt ist, dann bildet die Menge ihrer Teilmengen eine Boolesche mit der Vereinigung als $\vee$ und dem Durchschnitt als $\wedge$. Die Negation von A ist $X \setminus A$, die 0 ist die leere Menge und X ist die 1.

Insbesondere gelten die Formeln von De Morgan: Seien $M, N \subseteq X$. Dann

$$X \setminus (M \cup N) = (X \setminus M) \cap (X \setminus N), \quad X \setminus (M \cap N) = (X \setminus M) \cup (X \setminus N).$$

Venn-Diagramme zeigen.

3.4 Potenzmenge

Wenn M eine Menge ist, dann bildet die Menge ihrer Teilmengen die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.

Man kann die natürlichen Zahlen als Mengen darstellen: 0 entspricht $\emptyset$, 1 entspricht $\{\emptyset\}$, 2 entspricht $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\dots$, die Zahl $n + 1$ entspricht $\{0, 1, \dots, n\}$.

3.5 Russellsche Antinomie

Wenn alles Menge ist, dann muss man auch die Menge aller Mengen bilden können. Diese besitzt dann als Teilmenge die Menge M aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten. Aber sowohl die Aussage $M \in M$ als auch die Aussage $M \notin M$ führen zu Widersprüchen.

3.6 Produkte

Für $x \in X$ und $y \in Y$ bilden wir das *Paar* (x, y). Zwei Paare (x, y) und (a, b) sind genau dann gleich, wenn $x = a$ und $y = b$.

3.1 Definition. Das *Paar* (x, y) ist definiert als $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

3.2 Satz. $(x, y) = (a, b)$ *genau dann, wenn* $x = a$ *und* $y = b$.

Nicht vorrechnen:

Beweis. "$\Rightarrow$": 1. Fall $x = y$: Dann $(x, y) = \{\{x\}\}$ und daher ist auch $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ einelementig. Das bedeutet $\{a\} = \{a, b\}$, also $a = b$. Wir haben also $\{x\} = (x, x) = (a, b) = (a, a) = \{\{a\}\}$ und daher $b = a = x = y$.

2. Fall $x \neq y$. Dann enthält $(x, y) = (a, b)$ ein einelementiges und ein zweielementiges Element. Das einelementige Objekt ist $\{x\} = \{a\}$, also $x = a$. Schließlich $\{y\} = \{x, y\} \setminus \{x\} = \{a, b\} \setminus \{a\} = \{b\}$.

"$\Leftarrow$": Folgt sofort aus der Definition. □

3.3 Definition. Es seien X und Y zwei Mengen. Die Menge aller Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$ ist das *kartesische Produkt* von X mit Y, geschrieben $X \times Y$. Anstelle von $X \times X$ schreibt man oft X^2.

Beispiel $\{0, 1\} \times \{2, 3, 4\} = \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$.

Höhere Produkte definiert man sukkzessive, also $A \times B \times C = (A \times B) \times C$, schreibt die Elemente von $A \times B \times C$ dann aber in der Form (a, b, c).

3.7 Relationen

Eine *Relation* zwischen zwei Mengen X und Y ist eine Teilmenge von $X \times Y$.

Beispiele für Relationen

(a) $x < y$ für $x, y \in \mathbb{R}$,

(b) $x \leq y$ für $x, y \in \mathbb{R}$,

(c) Zwei Menschen x und y sind verwandt.

(d) Ein Mensch x ist der Opa von y.

(e) Sei $M_B = \{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \mid q \neq 0\}$. Wir definieren eine Relation $\sim$ durch $(p, q) \sim (m, n) \Leftrightarrow pn = mq$.

Es sei R eine Relation auf M^2. Sie kann die folgenden Eigenschaften haben:

Reflexivität: Die Relation R heißt *reflexiv,* wenn $(x, x) \in R$ für jedes $x \in M$.

Von den Beispielen sind (b), (c) und (e) reflexiv.

Symmetrie: Die Relation R heißt *symmetrisch,* wenn aus $(x, y) \in R$ auch $(x, y) \in R$ folgt.

Von den Beispielen sind nur (c) und (e) symmetrisch.

Antisymmetrie: Die Relation R heißt *antisymmetrisch,* wenn aus $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ bereits $x = y$ folgt.

Nur (a), (b)und (d) sind antisymmetrisch. ((a) und (d), weil die Voraussetzung nie erfüllt ist.)

Transitivität Die Relation R heißt *transitiv,* wenn aus $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ bereits $(x, z) \in R$ folgt.

Die Beispiele (a), (b) und (e) sind transitiv.

3.8 Äquivalenzrelationen und Wohldefiniertheit

Eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, ist eine *Äquivalenzrelation.*

Von den Beispielen ist nur (e) eine Äquivalenzrelation.

Wenn man eine Äquivalenzrelation hat, dann kann man äquivalente Elemente identifizieren. Alle zu einem Element äquivalenten Elemente bilden zusammen die *Äquivalenzklasse* dieses Elements. Wenn die Äquivalenzrelation mit $\sim$ bezeichnet wird, schreibt man

$$[x]_\sim = \{y \mid x \sim y\}.$$

Dann gilt $[x]_\sim = [y]_\sim$ genau dann, wenn $x \sim y$.

Bruchrechnung als Beispiel

Der Bruch $\frac{p}{q}$ ist die Äquivalenzklasse von $(p, q) \in M_B$ bezüglich der Äquivalenzrelation aus Beispiel (e). In Zeichen

$$\frac{p}{q} = [(p, q)]_\sim.$$

Bekanntlich wird die Addition von Brüchen definiert durch $\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn+qm}{qn}$. Man hat nun folgendes Problem: Es muss beispielsweise gelten $\frac{1}{2} + \frac{3}{9} = \frac{4}{8} + \frac{1}{3}$.

Das ist das Problem der *Wohldefiniertheit.*

3.9 Ordnung

Eine *Ordnung* ist eine reflexive, antisymmetrische, transitive Relation.

- Die klassische $\leq$-Relation auf $\mathbb{R}$ ist eine Ordnung.
- Sei M eine Menge. Ihre Teilmengen werden durch die Teilmengenrelation $R = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(M)^2 \mid X \subseteq Y\}$ geordnet.
- Für $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$ sei $(x, y) \leq (a, b)$ dann gegeben, wenn $x \leq y$ und $y \leq b$. Dann ist $\leq$ eine Ordnung.

4 Ganze Zahlen und vollständige Induktion

4.1 Konstruktion

Wenn man die natürlichen Zahlen aus Mengen bauen will, kann man das wie folgt tun:

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad 3 = \{0, 1, 2\}, \ldots$$

4.2 Vollständige Induktion

Das Prinzip der vollständigen Induktion besagt:

Wenn eine von einer natürlichen Zahl abhängige Aussage $A(n)$ für $n = 1$ zutrifft und für jedes n die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gilt, dann gilt $A(n)$ für alle n.

Beispiel:

4.1 Satz. *Für alle natürlichen Zahlen* $n \geq 5$ *gilt*

$$2^n > n^2,$$

Beweis. Mit vollständiger Induktion nach n.

Wir verankern die Induktion bei $n = 5$: In diesem Fall lautet die Behauptung $32 = 2^5 > 5^2 = 25$. Das stimmt.

Schluss von n nach $n+1$:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 = \frac{(n+1)^2}{n^2}n^2 < \frac{(n+1)^2}{n^2}2^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 2^n \leq \left(1 + \frac{1}{5}\right)^2 2^n \\ = \left(\frac{6}{5}\right)^n 2^n = \frac{36}{25}2^n < 2^{n+1}.\end{aligned}$$

Bei der ersten Ungleichung wird die Induktionsvoraussetzung angewandt, bei der zweiten die Voraussetzung $n \geq 5$. $\square$

5 Abbildungen

5.1 Bezeichnungen

Seien X und Y Mengen. Eine *Abbildung* f von X nach Y ist eine Relation R zwischen X und Y derart, dass es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in R$ gibt. Man bezeichnet dann X als den *Definitionsbereich*, Y als den *Zielbereich* und R als den *Graphen* von f.

Wenn man den algorithmischen Charakter betonen will, ersetzt man den Graphen durch die Zuordnungsvorschrift. Man schreibt

$$f\colon X \to Y, \quad x \mapsto f(x).$$

Eine Abbildung, deren Werte Zahlen sind, bezeichnet man als *Funktion*.

Beispiele für drei verschiedene Funktionen

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,$

(b) $g\colon \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,$

(c) $h\colon \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \to \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\},\ x \mapsto x^2.$

Der anschauliche Wert des Graphen wird überbewertet.

Beispiel einer Abbildung, die keine Funktion ist

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \quad (x, y) \mapsto \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq a, y \leq b\}.$$

5.2 Umkehrabbildung

Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion und $\mathcal{G}(f)$ ihr Graph. Wenn $S = \{(y, x) \mid (x, y) \in \mathcal{G}(f)\}$ der Graph einer Funktion $g\colon Y \to X$ ist, dann heißt f *invertierbar* und man bezeichnet g als *Umkehrabbildung* von f. Man schreibt f^{-1} für die Umkehrabbildung.

Nur Beispiel (c) besitzt eine Umkehrabbildung.

5.3 Bild- und Urbildmenge

Mit jeder Abbildung $f\colon X \to Y$ sind auch noch zwei mengenwertige Abbildungen definiert

$$B_f\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y), \quad M \mapsto \{f(x)\colon x \in M\}, \qquad U_f\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X), \quad N \mapsto \{x \mid f(x) \in N\}.$$

$B_f(M)$ ist die *Bildmenge* von M, $U_f(N)$ ist die *Urbildmenge* von N.

Beispiel mit den Abbildungen aus dem vorigen Abschnitt und $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$.

Man schreibt $f(M)$ anstelle von $B_f(M)$ und $f^{-1}(N)$ anstelle von $U_f(N)$. Für den Fall, dass f invertierbar ist, hat man eine Doppeldeutigkeit, denn $f^{-1}(N)$ kann sowohl interpretiert werden als $B_{f^{-1}}(M)$ als auch als $U_f(M)$. Glücklicherweise ist das in diesem Fall dasselbe.

5.4 Abzählbarkeit der rationalen Zahlen

5.1 Satz. *Es gibt eine invertierbare Abbildung* $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

Beweis.

$$f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \quad f(i,j) = \frac{1}{2}(i+j-2)(i+j-1)+j.$$

Weil von den beiden Zahlen $i+j-2$ und $i+j-1$ genau eine gerade ist, ist $f(i,j)$ eine natürliche Zahl.

Um die Umkehrfunktion an einer Stelle $n \in \mathbb{N}$ anzugeben, bestimmen wir zuerst dasjenige $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{2}k(k-1) < n \leq \frac{1}{2}(k+1)k$$

und setzen dann

$$g(n) = \left(k+1-n+\frac{1}{2}k(k-1), n-\frac{1}{2}k(k-1)\right).$$

Wir zeigen zuerst $f(g(n)) = n$. Wenn wir i und j durch $g(n) = (i,j)$ definieren, dann gilt $i+j = k+1$, also

$$f(g(n)) = \frac{1}{2}(k-1)k+j = \frac{1}{2}(k-1)k+n-\frac{1}{2}k(k-1) = n. \tag{5.1}$$

Wenn wir $g(f(i,j)) = (i,j)$ zeigen wollen, müssen wir zuerst für $n = f(i,j)$ den passenden Wert von k gemäß Anforderung (5.1) bestimmen. Wir zeigen also als Zwischenbehauptung, dass $k = i+j-1$. Für dieses k ist die linke Ungleichung von (5.1) jedenfalls richtig. Die rechte sieht man wie folgt

$$\frac{1}{2}(k+1)k = \frac{1}{2}k(k-1)+k = \frac{1}{2}(i+j-1)(i+j-2)+i+j-1 = f(i,j)+i-1 \geq n.$$

Wir setzen $g(n) = (a, b)$ und rechnen a und b einzeln aus:

$$a = k + 1 - n + \frac{1}{2}k(k-1) = i + j - \frac{1}{2}(k-1)k - j + \frac{1}{2}k(k-1) = i,$$

hierbei verwenden wir, dass $n = \frac{1}{2}(k-1)k + j$, denn so haben wir k gewählt. Die Bestimmung von b läuft so ähnlich

$$b = n - \frac{1}{2}k(k-1) = \frac{1}{2}(k-1)k + j - \frac{1}{2}k(k-1) = j.$$

Damit ist der Beweis beendet. □

5.2 Korollar. *Es gibt genauso viele rationale Zahlen wie natürliche.*

Cantor hat auch gezeigt, dass es echt mehr reelle als rationale Zahlen gibt.