3.7 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 1 *Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix. Dann heißt $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von A, wenn ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ existiert, so dass $Ax = \lambda x$. In diesem Fall heißt x Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.*

Bemerkung 2

- Per Definition ist ausgeschlossen, dass $0 \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor ist. Allerdings kann natürlich $0 \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert einer Matrix sein.
- Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix sind genau die Diagonaleinträge.

Satz 3 *Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Dann ist*

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda E_n)x = 0\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda E_n)$$

ein Unterverktorraum von $\mathbb{R}^n$. Falls λ ein Eigenwert von A ist, so heißt E_λ Eigenraum von A zum Eigenwert λ.

Für eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ gilt nun

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ Eigenwert von } A \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \neq 0 \text{ mit } Ax = \lambda x$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists x \neq 0 \text{ mit } x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda E_n) \quad \Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda E_n) = 0.$$

Das motiviert die folgende Definition:

Definition 4 *Das charakteristische Polynom χ_A einer Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ist definiert durch*

$$\chi_A(X) = \det(A - X \cdot E_n).$$

Satz 5 *Die Eigenwerte einer Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A, d.h. die Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$, für die gilt $\chi_A(\lambda) = 0$.*

Bemerkung 6

- Nicht jede Matrix hat Eigenwerte. So gilt zum Beispiel $\chi_A(X) = X^2 + 1$ für

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Bemerkt sei, dass die lineare Abbildung zu A genau die Drehung um 90° beschreibt.
- Möchte man Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume einer Matrix A bestimmen, so verfährt man folgendermaßen: man bestimmt zunächst die Eigenwerte einer Matrix, indem man das charakteristische Polynom und dann seine Nullstellen ausrechnet. Anschließend kann man den Eigenraum zu einem Eigenwert λ durch die Beschreibung in Satz 3 bestimmen, also als Kern der Matrix $A - \lambda E_n$. Die nichttrivialen Elemente in den Eigenräumen sind die Eigenvektoren zum entsprechenden Eigenwert.