Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Dr. T. Weist, Dr. S. Kionke

Abgabe bis:
Di 13.01.2015
13:00 Uhr

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (3 Punkte, Multiple Choice). Es seien U und V zwei Untervektorräume im $\mathbb{R}^n$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) Die Vereinigung $U \cup V$ ist stets ein Untervektorraum vom $\mathbb{R}^n$.

(b) Der Schnitt $U \cap V$ ist stets ein Untervektorraum vom $\mathbb{R}^n$.

(c) Falls ein Untervektorraum vom $\mathbb{R}^3$ die Vektoren $(2,0,7)^T$ und $(0,0,3)^T$ enthält, so enthält er auch den Vektor $(1,0,0)^T$.

(Richtige Antwort = 1 Punkt, falsche Antwort = -1 Punkt, keine Antwort = 0 Punkte.)

Aufgabe 2 (3 Punkte, die Begründung wird bewertet). Entscheiden Sie für die folgenden Mengen, ob es sich um einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ handelt. Begründen Sie ihre Antwort, indem Sie entweder die definierenden Eigenschaften eines Untervektorraumes nachweisen oder zeigen, dass die Eigenschaften nicht erfüllt sind.

(a) $U = \{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + x_2 = 0 \}$.

(b) $V = \{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 1 \}$.

(c) $W = \{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Man nennt eine quadratische Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ *symmetrisch*, falls $A^T = A$ gilt.

(a) Finden Sie eine symmetrische 3×3 Matrix mit mindestens vier verschiedenen Einträgen.

(b) Beweisen mithilfe der Rechenregeln aus der Vorlesung:
Für jede Matrix $B \in M(n \times m, \mathbb{R})$ ist die Matrix $B \cdot B^T$ symmetrisch.

(c) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ der symmetrischen $n \times n$-Matrizen ein Untervektorraum des Vektorraumes $M(n \times n, \mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 4 (2 Punkte). Es sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $v \neq 0$. Die Menge

$$\mathbb{R}v = \{ \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

nennt man die von v aufgespannte *Gerade*.

(a) Zeigen Sie: Die von v aufgespannte Gerade ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.

(b) Finden Sie zwei verschiedene Vektoren im $\mathbb{R}^2$, die dieselbe Gerade aufspannen.