Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Dr. T. Weist, Dr. S. Kionke

Abgabe bis:
Di 20.01.2015
13:00 Uhr

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (2 Punkte, Multiple Choice). Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) Sind $f\colon V \to U$ und $g\colon W \to V$ lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen, so ist die Abbildung $h\colon x \mapsto f(g(x))$ eine lineare Abbildung von W nach U.

(b) Die Abbildung $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + x_2x_3$ ist linear.

(Richtige Antwort = 1 Punkt, falsche Antwort = -1 Punkt, keine Antwort = 0 Punkte.)

Aufgabe 2 (3 Punkte). Wir betrachten die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^2$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es sei $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $\phi(u) = (1, 7)^T$ und $\phi(v) = (3, -3)^T$.

(a) Finden Sie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $e_1 = au + bv$ und $e_2 = cu + dv$.

(b) Bestimmen Sie $\phi(e_1)$ und $\phi(e_2)$.

(c) Finden Sie eine Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit $\phi(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Wir untersuchen die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, die definiert ist durch

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 \\ x_3 - 2x_4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Weisen Sie nach, dass die Abbildung f linear ist.

(b) Finden Sie eine Matrix $A \in M(3 \times 4, \mathbb{R})$ mit $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$.

(c) Berechnen Sie den Kern von f als Lösungsmenge eines Gleichungssystems.

(d) Welche lineare Gleichung müssen y_1, y_2, y_3 erfüllen, damit der Vektor $(y_1, y_2, y_3)^T$ im Bild von f liegt?

Aufgabe 4 (3 Punkte, nur das Ergebnis wird bewertet). Betrachten Sie die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } w = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Normen und Skalarprodukte.

(a) $\|u\|$ (b) $\|v - w\|$ (c) $\|w - u\|$ (d) $\langle u, v\rangle$ (e) $\langle v, w\rangle$ (f) $\langle u, w\rangle$