

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I
Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (2 Punkte, Multiple Choice). Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

- (a) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 &= r \\3x_1 + 2x_2 &= s\end{aligned}$$

hat für beliebig vorgegebene $r, s \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung.

- (b) Gegeben sei ein Gleichungssystem $Ax = b$. Das Vertauschen zweier Spalten von A ändert die Lösungsmenge nicht.

(Richtige Antwort = 1 Punkt, falsche Antwort = -1 Punkt, keine Antwort = 0 Punkte.)

Aufgabe 2 (3 Punkte, Rechenweg wird bewertet). Gegeben sind folgende lineare Gleichungssysteme.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \begin{aligned} 4x_1 + 6x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= 10 \end{aligned} & \text{(ii)} & \begin{aligned} x_1 + 5x_2 - x_3 &= 12 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 7x_1 + 3x_2 + x_3 &= 28 \end{aligned} \end{array}$$

Führen Sie jeweils die folgenden Schritte durch.

- (a) Bestimmen Sie die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$.
(b) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilen-Stufen-Form.
(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

Aufgabe 3 (2 Punkte, Rechenweg wird bewertet). Bringen Sie folgende Matrizen durch Zeilenoperationen auf Zeilen-Stufen-Form. Geben Sie bei jedem Schritt an welche Zeilenoperation Sie verwenden.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & -9 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (5 Punkte). Wir betrachten in dieser Aufgabe ein allgemeines Gleichungssystem

$$ax_1 + bx_2 = r$$

$$cx_1 + dx_2 = s$$

in zwei Unbekannten x_1 und x_2 sowie mit gegebenen $a, b, c, d, r, s \in \mathbb{R}$. Wir nehmen in dieser Aufgabe an, dass die Determinante verschwindet, das heißt $ad - bc = 0$.

- (a) Beschreiben Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit von r und s , falls $a = b = c = d = 0$ gilt.
- (b) Beschreiben Sie jeweils die Lösungsmenge in Abhängigkeit von r und s für die Fälle (i) $a \neq 0$, (ii) $b \neq 0$, (iii) $c \neq 0$ und (iv) $d \neq 0$. (Hinweis: Behandeln Sie Fall (i) ausführlich und überlegen Sie, wie sich damit auch die anderen Fälle lösen lassen.)
- (c) Geben Sie jeweils Zahlen a, b, c, d, r, s (alle $\neq 0$) an so, dass das zugehörige Gleichungssystem (i) keine Lösung besitzt bzw. (ii) unendlich viele Lösungen besitzt.