Gauß-Algorithmus

Unter Zeilenoperationen einer Matrix verstehen wir die drei folgenden Operationen:

1. Vertauschen einer Zeile mit einer anderen.

2. Multiplizieren einer Zeile mit einem Faktor ungleich null.

3. Addieren des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen.

Satz 1 *Sei $(A \mid b)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix des Linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt:*

1. *Entsteht $(\tilde{A} \mid \tilde{b})$ aus $(A \mid b)$ durch Zeilenumformungen, so gilt Lös$(A, b) =$Lös$(\tilde{A}, \tilde{b})$. Die beiden Linearen Gleichungssysteme haben also die gleichen Lösungen.*

2. *Die erweiterte Koeffizientenmatrix kann mit Zeilenumformungen auf folgende Zeilenstufenform gebracht werden*

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc|c}
0 & \dots & 0 & c_1 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & * & d_1 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & c_2 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & d_2 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & c_3 & * & \dots & \dots & \dots & * & d_3 \\
\vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & & & & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & c_l & * & \dots & * & d_l \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & d_{l+1} \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & d_m
\end{array}\right)$$

   wobei die erste Zeile mit k_0 Nullen beginnt, die zweite mit $k_0 + k_1 + 1$ u.s.w., also allgemein die i-te Zeile mit $k_0 + k_1 + \ldots + k_{i-1} + i - 1$ Nullen für $i = 1, \ldots, l + 1$. Die Einträge $*$ stehen hier für reelle Zahlen (die nicht übereinstimmen müssen), die sich aus dem Linearen Gleichungssystem ergeben. Weiter gilt

   - $c_1, \ldots, c_l \neq 0$
   - $\sum_{i=0}^{l} k_i + l = n$
   - *Die Zahlen l bzw. $k_0, \ldots, k_l$ hängen nur von der Ausgangsmatrix ab, wobei l der (Zeilen)-Rang von A heißt.*
   - *Es gilt $l \leq \min\{m, n\}$*
   - *Ist $l < m$ und existiert ein $j \in \{l + 1, \ldots, m\}$ mit $d_j \neq 0$, so existiert keine Lösung.*
   - *Gilt $d_j = 0$ für alle $j \in \{l + 1, \ldots, m\}$, so gilt Lös$(A, b) \neq \emptyset$, genauer:*
   - *Ist zusätzlich $l = n$, so gibt es genau eine Lösung.*
   - *Ist zusätzlich $l < n$, so gibt es unendlich viele Lösungen.*
   - *Die Lösungsmenge kann wie folgt bestimmt werden: die letzten k_l Variablen $x_n, \ldots, x_{n-k_l+1}$ können frei gewählt werden. Damit kann x_{n-k_l} aus der Gleichung*

     $$c_l \cdot x_{n-k_l} + * \cdot x_{n-k_l+1} + \ldots + * \cdot x_n = d_l$$

     bestimmt werden. Die nächsten k_{l-1} Variablen $x_{n-k_l-1}, \ldots, x_{n-k_l-k_{l-1}}$ können wieder frei gewählt werden. Nun kann man damit $x_{n-k_l-k_{l-1}-1}$ bestimmen. Dieses Verfahren setzt man fort, so dass man eine Lösungsmenge erhält, die von $n - l$ freien Variablen abhängt.