3.6 Inverse Matrizen und Determinanten

In diesem Abschnitt werden nur quadratische Matrizen betrachtet.

Definition 1 *Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ heißt invertierbar, wenn es eine Matrix $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ gibt mit $BA = E_n$. Die Matrix B heißt dann zu A inverse Matrix.*

Bemerkung 2

- Ist A invertierbar, so ist das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar. Das wollen wir begründen. Sei $(\tilde{A}|\tilde{b})$ durch Zeilenoperationen aus $(A|b)$ entstanden, so dass $(\tilde{A}|\tilde{b})$ in Zeilenstufenform ist. Dann hängt die Anzahl der Stufen nur von A ab (siehe auch Handout zum Gauß-Algorithmus). Ist nun $b = 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $Ax = 0$, so gilt

$$x = E_n x = (BA)x = B(Ax) = B \cdot 0 = 0.$$

  Damit ist x der Nullvektor, also $Ax = 0$ eindeutig lösbar. Damit hat eine Zeilenstufenform zu $(A|0)$ genau n Stufen, also auch eine zu $(A|b)$. Damit ist $Ax = b$ eindeutig lösbar.

- Damit erhält man auch, dass aus $BA = E_n$ schon $AB = E_n$ folgt. Ist nämlich x die eindeutige Lösung von $Ax = b$, so folgt $BAx = Bb$ und damit $x = Bb$. Da $Ax = b$ erhält man $ABb = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^n$. Da das insbesondere auch für die Einheitsvektoren gilt, folgt die Behauptung.

- Ist $C \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine weitere Matrix, so dass $CA = E_n$, so folgt

$$B = E_n B = CAB = CE_n = C,$$

  wobei wir $AB = E_n$ benutzt haben. Ist also A invertierbar, so ist die zu A inverse Matrix eindeutig bestimmt. Für diese schreibt man dann A^{-1}.

Seien $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ invertierbar. Dann gelten folgende Rechenregeln:

- $A^{-1}A = AA^{-1} = E_n$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ für alle $\lambda \neq 0$.

Diese prüft man leicht nach, wobei die dritte Regel aus $ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = E_n$ folgt. Zusammenfassend gilt folgender Satz:

Satz 3 *Für eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *A ist invertierbar.*
2. *Das Lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nur die Lösung $x = 0$.*
3. *Das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ hat (genau) eine Lösung.*
4. *Ist $\tilde{A}$ aus A durch Zeilenoperationen entstanden und in Zeilenstufenform, so hat diese n Stufen.*
5. *Die lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $f_A(x) = Ax$ ist injektiv und surjektiv.*

Bemerkung 4

- Es gibt folgendes Verfahren zur Bestimmung der inversen Matrix zu einer Matrix bzw. um festzustellen, ob eine Matrix invertierbar ist. Dazu sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Nun betrachtet man die Matrix $(A|E_n)$ mit n Zeilen und $2n$ Spalten. Kann man diese durch Zeilenoperationen (analog zum Gauß-Algorithmus) auf die Form $(E_n|B)$ bringen, so ist A invertierbar und es gilt $A^{-1} = B$. Am besten verfährt man dabei so, dass man zunächst versucht A auf Zeilenstufenform zu bringen und die entsprechenden Umformungen für E_n macht. Entsteht dabei eine Nullzeile, so ist A nicht invertierbar. Ist das nicht der Fall, so kann man die Diagonaleinträge durch Multiplikation der Zeilen mit einer Zahl zu 1 machen. Anschließend kann man die Einträge von A über den Diagonaleinträgen durch entsprechende Zeilenumformung zu 0 machen. Die entsprechenden Umformungen macht man für die Matrix E_n. Wichtig bei diesem Verfahren ist, dass man auf beiden Seiten die gleichen Zeilenumformungen macht.

Wir wollen nun einer Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine reelle Zahl $det(A)$, die Determinante von A, zuordnen. Dabei gilt, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt. Um die Zahl zu definieren brauchen den Begriff der Permutationen.

Definition 5 *Eine Permutation der Zahlen* $1, \ldots, n$ *ist eine Folge* $(i_1, \ldots, i_n)$*, in der alle Zahlen* $1, \ldots, n$ *genau einmal vorkommen.*

Zum Beispiel sind $(1, 2)$ und $(2, 1)$ die Permutationen von $1, 2$. Allgemein gibt es $n!$ Permutationen der Zahlen $1, \ldots, n$.

Definition 6 *Für* $x \in \mathbb{R}$ *definiert man das Vorzeichen/Signum durch*

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x > 0 \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \\ -1, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Für eine Permutation $(i_1, \ldots, i_n)$ *ist*

$$\operatorname{sign}(i_1, \ldots, i_n) := \prod_{1 \leq r < s \leq n} \operatorname{sign}(i_s - i_r).$$

Aus der Definition folgt, dass $\operatorname{sign}(i_1, \ldots, i_n) \neq 0$. Von den $n!$ Permutation von $1, \ldots, n$ hat die Hälfte das Vorzeichen 1 (die geraden Permutationen) und die andere Hälfte Vorzeichen -1 (die ungeraden Permutationen).

Definition 7 *Sei* $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ *mit Einträgen* a_{ij} *für* $1 \leq i, j \leq n$*. Dann heißt*

$$\det(A) := \sum_{(i_1, \ldots, i_n)} \operatorname{sign}(i_1, \ldots, i_n) a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n},$$

wobei über alle $n!$ *Permutationen der Zahlen* $1, \ldots, n$ *summiert wird, die Determinante von* A*.*

Für $n = 2$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ erhält man also $\det(A) = ad - bc$. Für $n = 3$ und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

erhält man die sogenannte Regel von Sarrus

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit Einträgen a_{ij} für $1 \leq i, j \leq n$. Dann gelten folgende Rechenregeln

- Durch das Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten von A ändert sich die Determinante um den Faktor (-1).
- Seien $A = (a_1, \dots, a_n)$ mit Spaltenvektoren $a_i \in \mathbb{R}^n$ für $1 \leq i \leq n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $b_i \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \det(a_1, \dots, a_{i-1}, \lambda a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) &= \lambda \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + b_i, a_{i+1}, \dots, a_n) &= \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &\quad + \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

- Daraus folgt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Es gilt $\det(A^T) = \det(A)$.
- Ist A eine obere Dreiecksmatrix, d.h. $a_{ij} = 0$ für $i > j$, so gilt

$$\det(A) = a_{11} \dots a_{nn}.$$

- Addiert man das Vielfache einer Zeile/Spalte zu einer anderen, so ändert sich die Determinante nicht. In Formeln (für Addition von Spalten)

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_i + \lambda a_j, \dots, a_j, \dots, a_n).$$

  Insbesondere kann man also A durch Zeilenoperationen auf Zeilen-Stufen-Form bringen und so die Determinante bestimmen. Dabei muss man darauf achten, dass sich die Determinante beim Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl nach der zweiten Regel ändert.
- Es gilt der Determinantenmultiplikationssatz $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Daraus folgt $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, wenn A invertierbar ist.
- Außerdem folgt $\det(A^k) = \det(A)^k$.

Es gilt der folgende Satz

Satz 8 *Eine quadratische Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn* $\det(A) \neq 0$.

Eine weitere Methode, um die Determinante einer Matrix zu bestimmen, ist der Laplacesche Entwicklungssatz. Dafür definieren wir für eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ die Matrix $A_{ij} \in M((n-1) \times (n-1), \mathbb{R})$ als die Matrix, die aus A entsteht, wenn man die i-te Zeile und j-te Spalte streicht.

Satz 9 *Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit Einträgen a_{ij} für $1 \leq i, j \leq n$. Dann gilt*

1. $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ *(Entwickeln nach der i-ten Zeile)*
2. $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ *(Entwickeln nach der j-ten Spalte)*

Im ersten Teil halten wir also den Zeilenindex fest, im zweiten den Spaltenindex. Diese Methode lässt sich sehr gut anwenden, wenn in einer Zeile oder Spalte viele Einträge 0 sind.